GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DEL 4/02/2014
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino le rette r_1 ed r_2, di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \\ z = 3 - 4t, \end{cases}$$

ed il piano α, di equazione cartesiana

$$\alpha : \; x + y + 2z + 1 = 0.$$

(1) Si verifichi che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.
(2) Si verifichi che r_1 ed r_2 sono entrambe incidenti ad α.
(3) Si descriva in forma parametrica la retta perpendicolare ad α ed incidente ad entrambe r_1 ed r_2.

Soluzione. Le due rette hanno velocità $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ e passano per i punti $P_1 = (0, 1, 2)$ e $P_2 = (1, 0, 3)$, rispettivamente.

(1) La condizione necessaria e sufficiente affinché le rette r_1 ed r_2 siano sghembe è che i tre vettori $v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ siano linearmente indipendenti, cioè che il determinante della matrice che li ha come colonne sia diverso da zero. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e questo prova che r_1 ed r_2 sono sghembe.

(2) Il fatto che le rette r_1 ed r_2 siano incidenti ad α è equivalente al fatto che le loro velocità non appartengano al sottospazio vettoriale associato ad α. A questo scopo occorre e basta che sia diverso da zero il prodotto scalare di v_1 e v_2 con la direzione $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ perpendicolare ad α. Abbiamo

$$n \cdot v_1 = 1 - 1 + 6 = 6 \neq 0, \quad n \cdot v_2 = -1 + 2 - 8 = -7 \neq 0.$$

Quindi le due rette non sono parallele ad α, e dunque gli sono incidenti.

(3) La retta cercata è l'intersezione dei piani $\alpha_1 = r_1 + \mathbb{R}n$ ed $\alpha_2 = r_2 + \mathbb{R}n$. Le direzioni normali n_1 ed n_2 ai due piani si possono prendere

uguali ai prodotti vettore $n_1 = n \times v_1$ ed $n_2 = n \times v_2$:

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $P_1 \in \alpha_1$, $P_2 \in \alpha_2$, le equazioni cartesiane dei due piani sono

$$\begin{cases} \alpha_1 : \ 5x - y - 2z = -5, \\ \alpha_2 : \ -8x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

La retta r cercata ha velocità parallela ad n. Poiché è l'intersezione $\alpha_1 \cap \alpha_2$, per determinare le sue equazioni parametriche sarà sufficiente trovare un punto P dell'intersezione $\alpha_1 \cap \alpha_2$. Determiniamo il punto P di r di ascissa $x = 0$, risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} y + 2z = 5, \\ 2y + 3z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -13 \\ z = 9. \end{cases}$$

Le equazioni parametriche cercate sono allora

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t - 13, \\ z = 2t + 9. \end{cases}$$

□

Esercizio 2. Si discuta, al variare del parametro reale k, il tipo della quadrica affine $\mathcal{Q}_k$, di equazione

$$x^2 + 2kxy + y^2 - z^2 + 2kx + 2z + 1 = 0.$$

Soluzione. Le matrici completa ed incompleta associate alla quadrica affine $\mathcal{Q}_k$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det A = k^2 - 1, \quad \det B = 3k^2 - 2.$$

Quindi la quadrica è non degenere se $3k^2 \neq 2$ ed a centro se $k^2 \neq 1$. Allora

$$\begin{gathered}
k^2 < \frac{2}{3} \Rightarrow \det B < 0,\ \det A < 0 \Rightarrow \text{iperboloide a due falde},\\
k^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \det B = 0,\ \det A < 0 \Rightarrow \text{cono},\\
\frac{2}{3} < k^2 < 1 \Rightarrow \det B > 0,\ \det A < 0 \Rightarrow \text{iperboloide a una falda},\\
k^2 = 1 \Rightarrow \det B > 0,\ \text{segnatura di } A = (+,-,0) \Rightarrow \text{paraboloide iperbolico},\\
k^2 > 1 \Rightarrow \det B > 0,\ \text{segnatura di } A = (+,-,-) \Rightarrow \text{iperboloide a una falda}.
\end{gathered}$$

□

Esercizio 3. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(2) Si scriva A in forma canonica di Jordan.
(3) Si dica se A è invertibile.

Soluzione. La matrice A è triangolare superiore ed ha polinomio caratteristico $p_A = (\lambda - 1)^5$. Ha quindi l'unico autovalore reale 1 con molteplicità algebrica 5. È poi

$$B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{di rango 2.}$$

Quindi la molteplicità geometrica di A è uguale a tre. Abbiamo

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = 0.$$

Quindi A si decompone in tre blocchi di Jordan, uno 3×3 e due 1×1. Una sua forma di Jordan è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è invertibile perché ha determinante $1 \neq 0$. $\square$