GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DEL 19/09/2012
SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. Si trovino i valori del parametro reale k per cui il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + (1+k)y + (1-2k)z = k, \\ (1+2k)x - y + (3k-1)z = 1+k, \\ (1+3k)x + ky + kz = 1+2k \end{cases}$$

ammette soluzione e si specifichi in quali di questi casi la soluzione non è unica.

Soluzione dell'esercizio 1. Osserviamo che la terza riga è somma delle prime due. Il sistema è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} kx + (1+k)y + (1-2k)z = k, \\ (1+2k)x - y + (3k-1)z = 1+k. \end{cases}$$

Calcoliamo il rango della matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k & 1-2k \\ 1+2k & -1 & 3k-1 \end{pmatrix}.$$

A questo scopo è sufficiente calcolare i determinanti dei minori che si ottengono bordando la seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1+2k & -1 \end{vmatrix} = -(2k^2+4k+1), \qquad \begin{vmatrix} 1+k & 1-2k \\ -1 & 3k-1 \end{vmatrix} = 3k^2.$$

Il secondo minore ha determinante diverso da 0 per $k \neq 0$. Il primo ha determinante $-1 \neq 0$ per $k = 0$. Quindi la matrice A ha rango due per ogni valore del parametro k. Quindi il sistema assegnato ha, per ogni valore di k, ∞^1 soluzioni; ammette cioè soluzione per ogni valore reale di k e le soluzioni dipendono in modo affine da un parametro reale.

Esercizio 2. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovino gli autovalori e, dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, si determini la sua forma di Jordan.

Soluzione dell'esercizio 2. La matrice $\lambda I - A$ è triangolare superiore ed ha come determinante il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^3.$$

Quindi A ha autovalori reali $0, 1$, con molteplicità algebriche rispettivamente uguali a due e a tre. Osserviamo che il determinante del minore di A ottenuto cancellando la seconda colonna e la quinta riga è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Quindi la matrice A ha rango quattro e pertanto l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1.

Consideriamo ora il minore della matrice $A - I$ ottenuto cancellando la prima colonna e l'ultima riga.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi il rango di $A - I$ è quattro e l'autovalore 1 ha perciò anch'esso molteplicità geometrica 1.

Quindi nella forma di Jordan della matrice A vi sono due blocchi e la forma è dunque data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Si determinino i valori del parametro reale k per cui la quadrica affine Q_k, d'equazione

$$k(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + 2xy + 4z = 0,$$

non degenera, e se ne determini il tipo.

Soluzione dell'esercizio 3. La matrice simmetrica associata alla Q_k è

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{cases} \Delta_1 = k, \\ \Delta_2 = k^2 - 1, \\ \Delta_3 = -k(k^2-1), \\ \Delta_4 = (k^2-1)(k^2-4). \end{cases}$$

La quadrica Q_k è quindi non degenere se $k \notin \{\pm 1, \pm 2\}$. Abbiamo poi

$$\begin{cases} \Delta_1/\Delta_0 = k, \\ \Delta_2/\Delta_1 = \dfrac{k^2-1}{k}, \\ \Delta_3/\Delta_2 = -k, \\ \Delta_4/\Delta_3 = \dfrac{4-k^2}{k}. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

	$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}$	$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$	$\frac{\Delta_3}{\Delta_2}$	$\frac{\Delta_4}{\Delta_3}$	tipo
$k < -2$	$-$	$-$	$+$	$+$	iperboloide a una falda
$-2 < k < -1$	$-$	$-$	$+$	$-$	iperboloide a due falde
$-1 < k < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	iperboloide a una falda
$0 < k < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$	iperboloide a una falda
$1 < k < 2$	$+$	$+$	$-$	$+$	iperboloide a due falde
$k > 2$	$+$	$+$	$-$	$-$	iperboloide a una falda

Per $k = 0$ la Q_0 è non degenere ed ha equazione

$$2xy + 4z = 0.$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

ed ha quindi segnatura $(2, 2)$. Poiché $\Delta_2 = -1$ e $\Delta_3 = 0$, la conica all'infinito degenera nell'unione di due rette e la quadrica assegnata è un paraboloide iperbolico.

Esaminiamo ora i casi degeneri:

$$\begin{aligned} k = -2: &\quad x^2 + y^2 - xy - (z+1)^2 = 0 \quad \text{(cono circolare)}, \\ k = 2: &\quad x^2 + y^2 + xy - (z-1)^2 = 0 \quad \text{(cono circolare)}, \\ k = -1: &\quad (x-y)^2 - (z+2)^2 + 5 = 0 \quad \text{(cilindro a base iperbolica)}, \\ k = 1: &\quad (x+y)^2 - (z-2)^2 + 3 = 0 \quad \text{(cilindro a base iperbolica)}. \end{aligned}$$