Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica 1 – Prova scritta del 28/01/2026

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+(\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2}}{(e^{ax^2} - \cos x)^2}.$$

$[a = 1, 2, -1, -2]$

Svolgimento. Per quanto riguarda il denominatore, si ha, per $x \to 0$,

$$e^{ax^2} = 1 + ax^2 + o(x^2), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

e pertanto

$$\begin{aligned}(e^{ax^2} - \cos x)^2 &= \left(\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right)^2 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 x^4 (1+o(1))^2 \\ &= \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 x^4(1+o(1)) = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Basta allora sviluppare il numeratore a meno di termini $o(x^4)$. Dunque per $x \to 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Di conseguenza, in base allo sviluppo

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$

otteniamo, osservando che $t := \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \to 0$ per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{2+(\sin x)^2} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} - -\frac{x^4}{32} + o(x^4)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{11}{96}x^4 + o(x^4)\right).\end{aligned}$$

Inoltre dallo sviluppo $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$, abbiamo

$$\frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x = \frac{\sqrt{2}}{4} x^2 + \frac{\sqrt{2}}{24} x^4 + o(x^4),$$

e dunque il numeratore diventa

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + (\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2} &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{11}{96}x^4\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{24}x^4\right) - \sqrt{2} + o(x^4) \\ &= -\left(\frac{11\sqrt{2}}{96} + \frac{\sqrt{2}}{24}\right) x^4 + o(x^4) = -\frac{5\sqrt{2}}{32} x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

In conclusione, il limite richiesto è

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + (\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2}}{(e^{ax^2} - \cos x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{5\sqrt{2}}{32}x^4 + o(x^4)}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 x^4 + o(x^4)} = -\frac{5\sqrt{2}}{32\left(a + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Esercizio 2. [10 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a\arctan(|x|) + \log(x+1)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

$[a = 2, 3 - 2, -3]$

Svolgimento. Ricordando che arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$ e che log è definita su $(0, +\infty)$, si ha che il dominio della funzione è $D = (-1, +\infty)$. Inoltre essendo le funzioni precedenti e il valore assoluto continue, f è continua in D, e non presenta simmetrie evidenti.

Per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) = a\arctan(|x|) + \log(x+1) = a\frac{\pi}{2} + o(1) + \log(x) + \log(1 + 1/x) = \log(x) + a\frac{\pi}{2} + o(1) \to +\infty,$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log x}{x} + \frac{\pi}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \to 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usata la gerarchia degli infiniti, per cui il grafico di f non ha asintoti orizzontali né obliqui, mentre per $x \to (-1)^+$ si ha

$$f(x) = a\arctan(1) + o(1) + \log(x+1) \to -\infty,$$

e quindi il grafico di f ha un asintoto vericale destro in $x = -1$.

Poiché $t \mapsto |t|$ è derivabile se e solo se $t \neq 0$, mentre arctan e log sono derivabili in tutto il loro dominio, la f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma potrebbe non esserlo per $x = 0$. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{a\ \mathrm{sgn}(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{a\ \mathrm{sgn}(x)\,(x+1) + 1 + x^2}{(1+x^2)(x+1)},$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+a+1}{(1+x^2)(x+1)} & \text{se } x > 0, \\ \frac{x^2-ax-a+1}{(1+x^2)(x+1)} & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Inoltre, dato che la funzione è continua e derivabile in un intorno di 0 per studiare la derivabilità in 0 usiamo il corollario del teorema di Lagrange:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+ax+a+1}{(1+x^2)(x+1)}, = a + 1 = f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-ax-a+1}{(1+x^2)(x+1)} = -a + 1 = f'_-(0),$$

che sono due limiti distinti (per i valori scelti di a), e dunque $x = 0$ è un punto angoloso per il grafico di f.

Per quanto riguarda lo studio del segno di f', osserviamo che il denominatore $(1 + x^2)(x + 1) > 0$ per ogni $x > -1$, dunque il segno di f' è lo stesso di quello del polinomio di secondo grado al numeratore. Distinguiamo il segno del numeratore in base ai valori di a.

- Nei casi $a = 2, 3$, si ha $x^2 - ax - a + 1 = 0$ se e solo se $x = x_\pm := \frac{a\pm\sqrt{a^2+4(a-1)}}{2}$, e chiaramente $x_- < 0 < x_+$, mentre

  $$x_- > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+4(a-1)} < a + 2 \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 < a + 1,$$

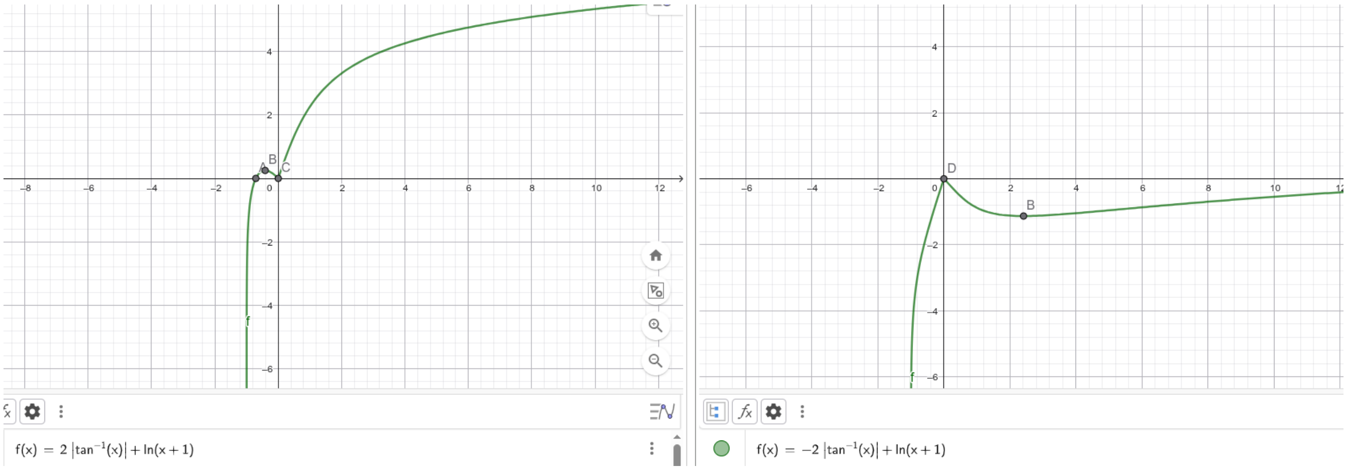
  e l'ultime disuguaglianza è chiaramente verificata. Dunque per $x < 0$ si ha

  $$f'(x) > 0 \iff x^2 - ax - a + 1 > 0 \iff x \in (-1, x_-),$$

  mentre chiaramente $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Si conclude che f è crescente in $(-1, x_-)$, decrescente in $(x_-, 0)$ e di nuovo crescente in $(0, +\infty)$, e quindi $x = x_-$ è un massimo relativo (ma non assoluto in quanto come visto $\sup_D f = +\infty$), e $x = 0$ è un minimo relativo (ma non assoluto poiché $\inf_D f = -\infty$), dove $f(0) = 0$.

- Nei casi $a = -2, -3$, si ha chiaramente $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-1, 0)$, mentre $x^2 + ax + a + 1 = 0$ se e solo se $x = x_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(a+1)}}{2} = \frac{|a| \pm \sqrt{a^2 + 4(|a|-1)}}{2}$, e chiaramente $x_- < 0 < x_+$. Quindi per $x > 0$ si ha
$$f'(x) > 0 \iff x^2 + ax + a + 1 > 0 \iff x > x_+.$$
Si conclude che f è crescente in $(-1, 0)$, decrescente in $(0, x_+)$ e di nuovo crescente in $(x_+, +\infty)$, e quindi $x = x_+$ è un minimo relativo (ma non assoluto in quanto $\inf_D f = -\infty$), e $x = 0$ è un massimo relativo (ma non assoluto poiché $\sup_D f = +\infty$), dove $f(0) = 0$.

Il grafico della funzione per $a = 2$ e $a = -2$ è



Esercizio 3. [8 punti] Si studi la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{Ax+B}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx.$$

Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^1 (Ax+B)\sqrt{1-x^2}dx.$$

$[(A,B) = (1,1), (-1,1), (1,2), (-1,3)]$

<u>*Svolgimento*.</u> Studio della convergenza. La funzione integranda f è potenzialmente illmitata in due punti:

- per $x \to 0^+$, perché $x \log x \to 0$;
- per $x \to 1^-$, perché $\log(x)\sqrt{1-x^2} \to 0$.

Per $x \to 0^+$, abbiamo $x+1 \to 1$ e $\sqrt{1-x^2} \to 1$, quindi l'andamento asintotico della funzione integranda è

$$f(x) \sim \frac{1}{(x|\log x|)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\alpha}$$

che è impropriamente integrabile se e solo se $\alpha < 1$.
Per $x \to 1^-$, poniamo $x = 1-y$, allora $y \to 0^+$ e

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(1-y)^2} = \sqrt{2y-y^2} \sim \sqrt{2y}, \qquad (x|\log x|)^\alpha = ((1-y)|\log(1-y)|)^\alpha \sim y^\alpha.$$

Quindi se $A+B \neq 0$ (cioè nei casi $(A,B) \neq (-1,1)$), si ha

$$f(x) \sim \frac{A+B}{\sqrt{2}} \frac{1}{y^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{A+B}{\sqrt{2}} \frac{1}{|x-1|^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

e pertanto f è impropriamente integrabile per $x \to 1^-$ se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} < 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$. Se invece $(A,B) = (-1,1)$, si ha

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha} \sim \frac{y}{\sqrt{2y}\,y^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{y^{\alpha-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-\frac{1}{2}}},$$

e pertanto f è impropriamente integrabile per $x \to 1^-$ se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$, cioè $\alpha < \frac{3}{2}$.
In conclusione l'integrale considerato converge se e solo se entrambe le condizioni sono soddisfatte, quindi per $\alpha < \frac{1}{2}$ se $(A,B) \neq (-1,1)$, e per $\alpha < 1$ se $(A,B) = (-1,1)$.

Calcolo del secondo integrale. Possiamo scrivere

$$\int_0^1 (Ax+B)\sqrt{1-x^2}dx = A\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx + B\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Si ha poi, con la sostituzione $t = 1-x^2$, da cui $dt = -2x\,dx$,

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Per il secondo integrale usiamo la sostituzione

$$x = \sin\theta \implies dx = \cos\theta\,d\theta,$$

e gli estremi di integrazione diventano $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Tenendo allora conto che per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\cos\theta \geq 0$, quindi $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$, e usando la formula di bisezione del coseno, l'integrale diventa

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

In conclusione, l'integrale richiesto è

$$\int_0^1 (Ax + B)\sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{A}{3} + \frac{B\pi}{4}.$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \cos x \, e^{\frac{1}{y}+\sin x} \\ y(0) = -\frac{1}{\log 3} \end{cases}$$

Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.
[Altre file:

- $y' = -y^2 \sin x \, e^{\frac{1}{y}+\cos x}$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\log 2}$;
- $y' = y^2 \cos x \, e^{\frac{1}{y}+\sin x}$ con $y(0) = -\frac{1}{\log 2}$;
- $y' = -y^2 \sin x \, e^{\frac{1}{y}+\cos x}$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\log 3}$.]

Svolgimento. Poiché $y^2 \cos x \, e^{\frac{1}{y}+\sin x} = y^2 e^{\frac{1}{y}} \cos x e^{\sin x}$, l'equazione differenziale proposta è a variabili separabili, ed è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $y \neq 0$. Poiché inoltre $y^2 e^{\frac{1}{y}} \neq 0$ per ogni $y \neq 0$, l'equazione non ha soluzioni stazionarie, ed essendo il dato iniziale $y_0 = -\frac{1}{\log 3} < 0$, la soluzione del problema di Cauchy considerato sarà tale che $y(x) < 0$ per ogni $x \in I$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. La soluzione sarà dunque definita dall'equazione

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} \, dy = \int \cos x \, e^{\sin x} dx.$$

Il primo integrale si può calcolare tramite la sostituzione $t = \frac{1}{y}$, da cui $dt = -\frac{1}{y^2} dy$, e quindi

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} \, dy = -\int e^{-t} dt = e^{-t} = e^{-\frac{1}{y}}.$$

Inoltre chiaramente

$$\int \cos x \, e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C,$$

e pertanto la soluzione richiesta soddisfa

$$e^{-\frac{1}{y}} = e^{\sin x} + C.$$

Imponendo poi la condizione iniziale si trova $e^{\log 3} = 3 = e^0 + C = 1 + C$, e quindi $C = 2$ e

$$e^{-\frac{1}{y}} = e^{\sin x} + 2,$$

da cui si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy considerato è

$$y(x) = -\frac{1}{\log(e^{\sin x} + 2)}.$$

Il dominio di tale funzione è $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^{\sin x} + 2 > 0, \; e^{\sin x} + 2 \neq 1\} = \mathbb{R}$, e poiché $e^{\sin x} + 2 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $y(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = \mathbb{R}$.
Gli svolgimenti delle altre versioni solo analoghi.