Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27 gennaio 2025 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$\frac{a|\log x|}{a|\log x|+1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali flessi. È richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Il $\log x$ è definito solo per $x > 0$. Inoltre, poiché $a > 0$, $|\log x| \geq 0$ implica $a|\log x| + 1 \geq 1 > 0$ per ogni $x > 0$, e quindi il denominatore non si annulla mai. Il dominio di f è dunque $D = (0, +\infty)$ e f è continua in D. Risulta inoltre, sempre a causa dei moduli:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0, \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Si ha poi, tenendo conto che $|\log x| \to +\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{a + \frac{1}{|\log x|}} = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{a}{a + \frac{1}{|\log x|}} = 1.$$

e pertanto il grafico di f non presenta asintoti verticali né obliqui, mentre ha la retta di equazione $x = 1$ come asintoto orizzontale a $+\infty$. Inoltre estendendo la funzione al punto $x = 0$ ponendo $f(0) := 1$ si otterrebbe una funzione continua in tutto $[0, +\infty)$.

A causa dei moduli, f potrebbe non essere derivabile dove il loro argomento si annulla, cioè per $x = 1$. Scrivendo inoltre

$$f(x) = \frac{a \log x}{a \log x - 1} \text{ per } 0 < x \leq 1, \qquad f(x) = \frac{a \log x}{a \log x + 1} \text{ per } x > 1,$$

risulta

$$f'(x) = -\frac{a}{x(a\log x - 1)^2} \text{ per } 0 < x < 1, \qquad f'(x) = \frac{a}{x(a\log x + 1)^2} \text{ per } x > 1.$$

Inoltre, applicando il corollario del teorema di Lagrange:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{a}{x(a\log x - 1)^2} = -a,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{a}{x(a\log x + 1)^2} = a,$$

e quindi $x = 1$ è un punto angoloso per il grafico di f, mentre essendo, per la gerarchia di infiniti e infinitesmi,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{a}{x(a\log x - 1)^2} = -\infty$$

(il denominatore tende a 0^+), si ha che $x = 0$ sarebbe un punto di cuspide per il grafico della funzione estesa.

È poi chiaro che $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, pertanto f è decrescente per $0 < x \leq 1$ e f è crescente per $x \geq 1$, e $x = 1$ è l'unico punto estremale per f, che è un punto di minimo assoluto.

Risulta infine:

$$f''(x) = a\frac{a\log x - 1 + 2a}{x^2(a\log x - 1)^3} \text{ per } 0 < x < 1, \qquad f''(x) = a\frac{-a\log x - 1 - 2a}{x^2(a\log x + 1)^3} \text{ per } x > 1.$$

Essendo allora, per $0 < x < 1$, $x^2(a\log x - 1)^3 \leq 0$ e

$$a\log x - 1 + 2a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{\frac{1}{a}-2} \in (0, 1),$$

si vede che $f''(x) > 0$ per $0 < x < e^{\frac{1}{a}-2}$, e $f''(x) < 0$ per $e^{\frac{1}{a}-2} < x < 1$, e pertanto f è convessa per $0 < x \leq e^{\frac{1}{a}-2}$ ed è concava per $e^{\frac{1}{a}-2} \leq x \leq 1$, e $x = e^{\frac{1}{a}-2}$ è un punto di flesso del grafico di f. E poiché

$$-a\log x - 1 - 2a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < e^{-2-\frac{1}{a}} < 1,$$

per $x > 1$ si ha $-a\log x - 1 - 2a < 0$ e chiaramente $x^2(a\log x + 1)^3 > 0$; pertanto $f''(x) < 0$ e f è concava per $x > 1$.

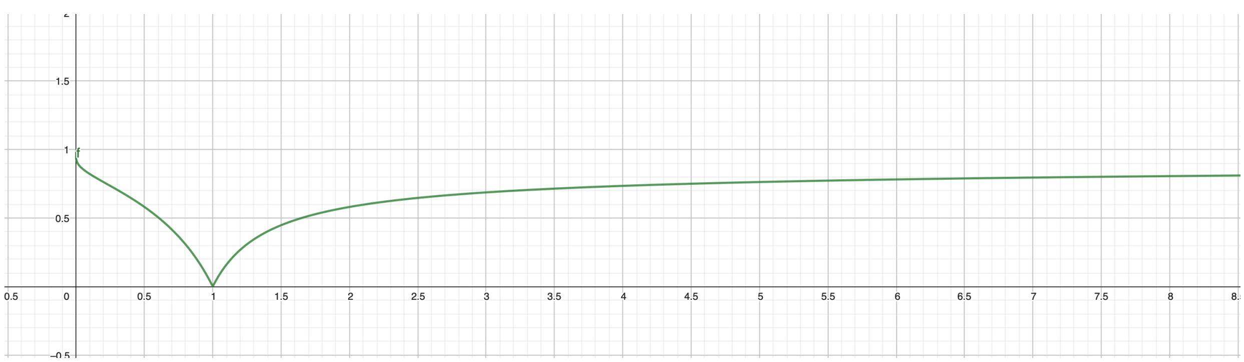

FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [7 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{a-x-y}}{\sqrt{e^x - 1}} \\ y(\log 2) = a - \log 2 \end{cases}.$$

Non è richiesto l'intervallo massimale di esistenza.

$[a = 5, 6, 2, 4]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili, ed è definita per $e^x > 1$, cioè $x > 0$. Inoltre, poiché $e^{-y} > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, non ha soluzioni stazionarie. La soluzione si ottiene dunque dall'equazione:

$$\int e^y dy = \int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int e^y dy = e^y + c.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = e^a \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{e^x - 1}$ e integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= 2e^a \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = 2e^a \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{(t^2+1)^2} \right) dt \\ &= 2e^a \arctan t + e^a \int t \Big(\frac{1}{t^2+1} \Big)' dt \\ &= e^a \arctan t + e^a \frac{t}{t^2+1} + c = e^a \arctan \sqrt{e^x - 1} + e^a \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$e^y = e^a \arctan \sqrt{e^x - 1} + e^a \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\log 2) = a - \log 2$ si ottiene $c = -e^a \frac{\pi}{4}$. In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = a + \log \left(\arctan \sqrt{e^x - 1} + \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$|z|^2(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}a\bar{z} = 0.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento:

Primo metodo. L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$|z|^2(1+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}a\bar{z}.$$

Scrivendo allora z in forma esponenziale $z = re^{i\theta}$, da cui $|z|^2 = r^2$, $\bar{z} = re^{i\theta}$, ed osservando che $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, si ottiene l'equazione

$$\sqrt{2}r^2e^{i\frac{\pi}{4}} = are^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

E pertanto uguagliando i moduli:

$$\sqrt{2}r^2 = ar \quad \Longleftrightarrow \quad r = 0 \text{ o } r = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

mentre uguagliando gli argomenti a meno di multipli di 2π:

$$\frac{\pi}{4} = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta allora scegliere $k = 0$ (tutti gli altri valori di k danno luogo alla stessa soluzione), e si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} = -\frac{a}{2} - \mathrm{i}\frac{a}{2}.$$

Secondo metodo. Scrivendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, da cui $|z|^2 = x^2 + y^2$, $\bar{z} = x - iy$, e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(x^2 + y^2)(1 + i) + ia(x - iy) = x^2 + y^2 + ay + i(x^2 + y^2 + ax) = 0$$

che, separando parti reali e immaginarie, equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ay = 0, \\ x^2 + y^2 + ax = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene allora $a(y - x) = 0$, cioè $y = x$. Sostituendo poi questo nella prima equazione si ottiene

$$2x^2 + ax = x(2x + a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = -\frac{a}{2},$$

e dunque le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = -\frac{a}{2} - \mathrm{i}\frac{a}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n}\,\log(n+a) - n}{\log^2(n+b)} n.$$

$[(a,b) = (5,4),(4,5),(3,2),(2,3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Per il denominatore si ha

$$\begin{aligned}\log^2(n+b) &= \log^2\left(n\left(1+\frac{b}{n}\right)\right) = \left(\log n + \log\left(1+\frac{b}{n}\right)\right)^2 \\ &= (\log n + o(1))^2 = \log^2 n(1+o(1)) = \log^2 n + o(\log^2 n),\end{aligned}$$

quindi basta sviluppare il numeratore a meno di termini $o(\log^2 n)$.
Si ha

$$(n\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n}\,\log(n+a) - n)n = \sqrt[n]{n}\left(n^2 - n\log(n+a)\right) - n^2,$$

e poiché $\sqrt[n]{n} \to 1$, il fattore $n^2 - n\log(n+a)$ andrà sviluppato fino a $o(\log^2 n)$:

$$\begin{aligned}n^2 - n\log(n+a) &= n^2 - n\log n - n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) = n^2 - n\log n - n\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n^2 - n\log n - a + o(1) = n^2 - n\log n + o(\log^2 n)\end{aligned}$$

(se ci si fosse limitati a scrivere $\log(1+\frac{a}{n}) = o(1)$ si sarebbe ottenuto uno sviluppo a meno di $o(n)$, insufficiente poiché $\frac{n}{\log^2 n} \to +\infty$). Inoltre poiché, come appena visto, $n^2 - n\log(n+a) \sim n^2$, basterà sviluppare $\sqrt[n]{n}$ a meno di $o(\frac{\log^2 n}{n^2})$:

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n} = 1 + \frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right).$$

Si ottiene quindi, per il numeratore:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n}\left(n^2 - \log(n+a)\right) - n^2 &= \left(1 + \frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right)\left(n^2 - n\log n + o(\log^2 n)\right) - n^2 \\ &= \left(n^2 - n\log n + n\log n - \log^2 n + \frac{1}{2}\log^2 n + o(\log^2 n)\right) - n^2 \\ &= -\frac{1}{2}\log^2 n + o(\log^2 n),\end{aligned}$$

dove per la seconda uguaglianza si è tenuto conto del fatto che

$$\frac{\frac{\log^3 n}{n}}{\log^2 n} = \frac{\log n}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\log^3 n}{n} = o(\log^2 n),\ o\left(\frac{\log^3 n}{n}\right) = o(\log^2 n).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\log^2 n + o(\log^2 n)}{\log^2 n + o(\log^2 n)} = -\frac{1}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[6 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(e^{ax} - e^{-ax})}{1 + x^{|\alpha|}} dx.$$

$[a = 4, 3, 5, 2]$

Svolgimento: Per $x \to 0^+$ risulta, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$,

$\log(e^{ax} - e^{-ax}) = \log(1 + ax + o(x) - (1 - ax + o(x)) = \log(2ax + o(x)) = \log x + \log(2a + o(1)) = \log x + o(\log x)$,

e inoltre $1 + x^{|\alpha|} \to 1$ se $\alpha \neq 0$, da cui segue

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\log x}{2} & \text{se } \alpha = 0, \\ \log x & \text{se } \alpha \neq 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, ricordando che la funzione $g(x) = \frac{1}{x^\gamma \log^\beta x}$ è integrabile per $x \to 0^+$ se e solo se $\gamma < 1$, oppure $\gamma = 1$ e $\beta > 1$, si vede che f è integrabile in $(0, 1]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (caso $\gamma = 0$, $\beta = -1$).
D'altra parte per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(e^{ax} - e^{-ax}) = \log(e^{ax}(1 - e^{-2ax})) = ax + \log(1 - e^{-2ax}) = ax + o(1),$$

e inoltre $1 + x^| \alpha| \sim x^{|\alpha|}$ se $\alpha \neq 0$, da cui segue

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{ax}{2} = \dfrac{a}{2}\dfrac{1}{x^{-1}} & \text{se } \alpha = 0, \\ ax^{1-|\alpha|} = a\dfrac{1}{x^{|\alpha|-1}} & \text{se } \alpha \neq 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile in $[1, +\infty)$ se e solo se $|\alpha| - 1 > 1$, cioè $|\alpha| > 2$.
Si conclude che f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $|\alpha| > 2$.