Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/1/25 – II turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [**8 punti**] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a + b\sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.
$[(a, b) = (3, 2), (2, -3), (-3, 2), (-1, -4)]$

Svolgimento: Considereremo qui il caso $(a, b) = (3, 2)$.

Osserviamo preliminarmente che la funzione è pari, quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Basta pertanto studiare la funzione per $x \geq 0$.

Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, infatti non c'è nessuna limitazione nei domini delle funzioni che compongono f.

Poiché la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, non vi sono asintoti verticali; inoltre per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) = 3 + 2\sqrt[3]{x^4 - x^2} \sim 2x^{4/3} \to +\infty$$

quindi il grafico di f non ha asintoti orizzontali; infine, sempre per $x \to +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{2x^{4/3}}{x} = 2x^{1/3} \to +\infty,$$

quindi non ci sono nemmeno asintoti obliqui.

Poiché l'argomento della radice cubica $x^4 - x^2 = 0$ per $x = 0, \pm 1$, e poiché la funzione $g(t) = t^{1/3}$ non è derivabile per $t = 0$, la f potrebbe non essere derivabile per $x = 0, \pm 1$. Invece per $x \neq 0, \pm 1$, si ha

$$f'(x) = \tfrac{4x(2x^2-1)}{3[x^2(x^2-1)]^{2/3}}.$$

Inoltre, in base al corollario del teorema di Lagrange (e alla parità della funzione):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{4x(2x^2-1)}{3[x^2(x^2-1)]^{2/3}} = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{4(2x^2-1)}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ è un punto di cuspide;}$$

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \tfrac{4x(2x^2-1)}{3[x^2(x^2-1)]^{2/3}} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \text{ sono punti di flesso a tangente verticale.}$$

Infine, è chiaro che per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $2x^2 - 1$ (tutto il resto è positivo), e $2x^2 - 1 > 0$ se e solo se $x > 1/\sqrt{2}$. Tenendo allora conto della parità di f, abbiamo che essa è crescente in $[-1/\sqrt{2}, 0]$ ed in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e decrescente negli altri intervalli, e che $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono i due punti di minimo assoluto della funzione, che vale $f(\pm 1/\sqrt{2}) = 3 - 2^{1/3}$ (mentre l'estremo superiore della funzione si deduce essere $+\infty$ dallo studio sugli asintoti).

.

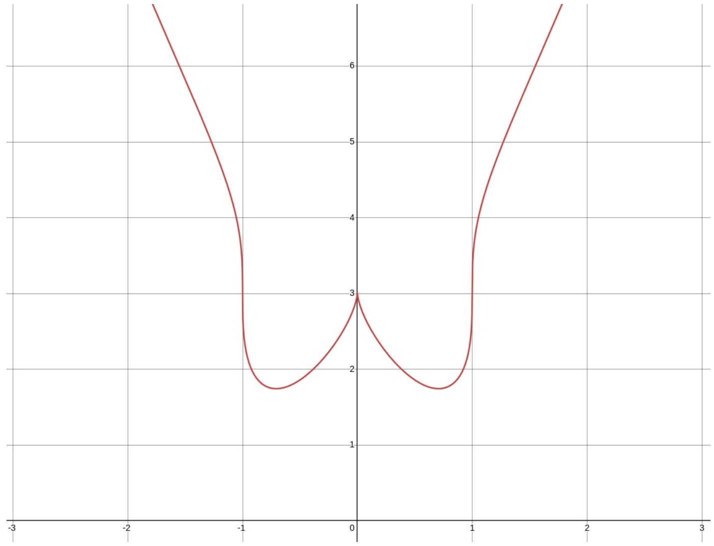

Figura 1. Grafico della funzione $3+2\sqrt[3]{x^4-x^2}$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{2b}^{+\infty} \frac{\log ax}{(x-b)^{3/2}}\, dx.$$

$[(a,b) = (5,2), (2,3), (2,5), (3,2)]$

Svolgimento: Consideriamo il caso $(a,b) = (2,3)$ e calcoliamo prima l'integrale indefinito. Procedendo per parti:

$$I := \int \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}}\, dx = -2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + 2\int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\, dx.$$

Integriamo adesso il secondo addendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\, dx &= (t := \sqrt{x-3}) = 2\int \frac{1}{t^2+3}\, dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\, dt \\
&= (u = t/\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} u + k \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \qquad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Inserendo quest'ultimo risultato nell'integrale indefinito, otteniamo:

$$I = -2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi, ricordando che $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}
\int_6^{+\infty} \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}}\, dx &= \lim_{c\to\infty} \left[-2\frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} \right]_6^c \\
&= \lim_{c\to\infty} \left\{ -2\frac{\log(2c)}{(c-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \tfrac{\sqrt{c-3}}{\sqrt{3}} + 2\frac{\log(12)}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 1 \right\} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(12).
\end{aligned}$$

Esercizio 3. [6 punti]
Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$[A] \qquad z^2(4-|z^2|)=5i.$$
$$[B] \qquad z^2(|z^2|-2)=3i.$$
$$[C] \qquad z^2(2-|z^2|)=3i.$$
$$[D] \qquad z^2(|z^2|-4)=5i.$$

Svolgimento: Mostreremo qui lo svolgimento nel caso [B].

Primo metodo. Si scrive $z=\rho e^{i\theta}$, da cui $z^2=\rho^2 e^{2i\theta}$ (formule di De Moivre), e $|z^2|=|z|^2=\rho^2$, e quindi

$$z^2(|z^2|-2)=\rho^2(\rho^2-2)e^{2i\theta}=\begin{cases}\rho^2(\rho^2-2)e^{2i\theta} & \text{se } \rho^2(\rho^2-2)\geq 0,\\ \rho^2(2-\rho^2)e^{i(2\theta+\pi)} & \text{se } \rho^2(\rho^2-2)<0,\end{cases}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è tenuto conto del fatto che il modulo di un numero complesso è non negativo, e che $-1=e^{i\pi}$. Essendo inoltre $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, si deduce che si devono risolvere i due problemi

$$\rho^2(\rho^2-2)e^{2\theta i}=3e^{i(\pi/2)} \qquad \text{se } \rho^2-2\geq 0,$$
$$\rho^2(2-\rho^2)e^{(2\theta+\pi)i}=3e^{i(\pi/2)} \qquad \text{se } \rho^2-2<0.$$

Eguagliando allora i moduli, e gli argomenti a meno di multipli interi di 2π, dalla prima equazione si ottiene il sistema

$$\begin{cases}\rho^2(\rho^2-2)=3,\\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\rho^4-2\rho^2-3=0,\\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

E risolvendo l'equazione $\rho^4-2\rho^2-3=0$ nell'incognita $\rho^2\geq 0$ si ottiene $\rho^2=3$ (la soluzione negativa è da scartare), da cui, essendo anche $\rho\geq 0$, $\rho=\sqrt{3}$. Dunque dalla prima equazione si ottengono le soluzioni

$$z=\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k=0,1$$

(gli altri valori di k produrrebbero soluzioni uguali a queste), cioé $z=\pm\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Procedendo nello stesso modo dalla seconda equazione si ottiene il sistema

$$\begin{cases}\rho^4-2\rho^2+3=0,\\ \theta=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

e si vede subito che l'equazione $\rho^4-2\rho^2+3$ non ha soluzioni reali.

In conclusione, l'equazione data ha le due soluzioni

$$z=\pm\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i).$$

.

Secondo metodo. Si pone $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Essendo allora $|z^2|=|z|^2=x^2+y^2$ l'equazione diventa

$$(x^2-y^2+2ixy)(x^2+y^2-2)=3i \;\Leftrightarrow\; (x^2-y^2)(x^2+y^2-2)+2ixy(x^2+y^2-2)=3i,$$

e separando parti reali e immaginarie si ottiene il sistema

$$\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2+y^2-2)=0,\\ 2xy(x^2+y^2-2)=3.\end{cases}$$

Segue dall'ultima equazione che $x^2+y^2-2\neq 0$, quindi, per la prima equazione $x^2=y^2$, ovvero $x=\pm y$. Sostituendo $x=y$ nella seconda equazione si ottiene $2y^2(2y^2-2)=3$, ovvero $4y^4-4y^2-3=0$, che risolta rispetto a $y^2 \geq 0$ fornisce $y^2 = \frac{3}{2}$ (la soluzione negativa è da scartare), e quindi $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Sostituendo $x = -y$ nella seconda equazione si ottiene $-2y^2(2y^2 - 2) = 3$, ovvero $-4y^4 + 4y^2 - 3 = 0$, che non ammette soluzioni reali. Perciò le due soluzioni sono $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + i)$.

Terzo metodo, più rapido. Poiché $|z^2| - 2$ è un numero reale, affinché l'equazione sia soddisfatta deve essere $z^2 = ai$ con $a \in \mathbb{R}$. Ma allora

$$|z^2| - 2 = |ai| - 2 = |a| - 2$$

e sostituendo tutto nell'equazione data si trova

$$ai(|a| - 2) = 3i \quad \Leftrightarrow \quad a|a| - 2a - 3 = 0,$$

che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 2a - 3 = 0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a < 0, \\ -a^2 - 2a - 3 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha l'unica soluzione $a = 3$, e il secondo non ha soluzioni. Dunque $z^2 = 3i = 3e^{i\pi/2}$, e prendendo le radici quadrate $z = \pm\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + i)$.

Esercizio 4. [5 punti] Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al IV ordine di

$$f(x) = \frac{1}{\log(a+x^2)}.$$

$[a = 4, 5, 2, 3]$

Svolgimento: Useremo i seguenti sviluppi per $t \to 0$:

$$\log(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2), \qquad \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Consideriamo il caso $a = 5$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\log 5 + \log\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)} \\
&= \frac{1}{\log 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{25} + o(x^4)} \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 + \frac{1}{5\log 5}\,x^2 - \frac{1}{50\log 5}\,x^4 + o(x^4)\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 - \left(\frac{1}{5\log 5}\,x^2 - \frac{1}{50\log 5}\,x^4\right) + \left(\frac{1}{5\log 5}\,x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right] \\
&= \frac{1}{\log 5}\left[1 - \frac{1}{5\log 5}\,x^2 + \left(\frac{1}{50\log 5} + \frac{1}{25\log^2 5}\right)x^4 + o(x^4)\right] \\
&= \frac{1}{\log 5} - \frac{1}{5\log^2 5}\,x^2 + \left(\frac{1}{50\log^2 5} + \frac{1}{25\log^3 5}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Idea per altro svolgimento: Si pone $x^2 = t$ e si considera la funzione $g(t) = [\log(a+t)]^{-1}$.
Poiché $x \to 0$ dà anche $t \to 0$, si può scrivere lo sviluppo di Maclaurin di g al secondo ordine (basta!) calcolando esplicitamente $g'(0)$ e $g''(0)$ e poi riportarlo allo sviluppo di $f(x)$, dato che $f(x) = g(x^2)$.

Esercizio 5. [7 punti]
Dopo aver trovato la soluzione del problema di Cauchy

$$[A/C] \quad \begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A, \end{cases} \qquad [B/D] \quad \begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ y(-\pi) = B, \end{cases}$$

trovarne l'intervallo massimale di esistenza.

$[A = 2,4;\ B = 3,5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Consideriamo prima il caso [C].

L'EDO è a variabili separabili, ed è definita per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $y \neq 0$. Poiché le condizioni iniziali sono imposte in $x_0 = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$ e $y_0 = 4 \in (0, +\infty)$, per la soluzione del problema di Cauchy si avrà $y(x) > 0$ per ogni $x \in I_0 \subset (-\pi, 0)$ (I_0 intervallo massimale di esistenza). Poiché inoltre $\cosh y \geq 1 > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, non ci sono soluzioni stazionarie, e bisogna dunque risolvere l'equazione

$$\int \frac{\operatorname{senh} y}{\cosh}\, dy = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx.$$

Svolgendo gli integrali, e tenendo conto che $\sin x < 0$ per ogni $x \in (-\pi, 0)$, abbiamo

$$\int \frac{\operatorname{senh} y}{\cosh}\, dy = \log|\cosh y| + c_1 = \log\cosh y + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \log|\operatorname{sen} x| + c_2 = \log(-\sin x) + c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene dunque l'equazione

$$(1) \qquad \log(\cosh y) = \log(-\operatorname{sen} x) + c = \log(-k \operatorname{sen} x) \qquad \text{dove } c := c_2 - c_1 \in \mathbb{R} \ \text{ e } k = e^c > 0,$$

ed esponenziando ambo i membri

$$\cosh y(x) = -k \operatorname{sen} x.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha $k = \cosh 4$, quindi la soluzione è:

$$y(x) = \operatorname{arccosh}\big(-(\cosh 4)\operatorname{sen} x\big), \qquad x \in I_0$$

(la condizione iniziale si poteva usare anche in (1), trovando direttamente la costante di integrazione c). Per quanto riguarda l'individuazione di I_0 consideriamo che il dominio di arccosh è $[1, +\infty)$, e che, come detto, $y(x) > 0$ per ogni $x \in I_0$. Va quindi imposto $-(\cosh 4)\operatorname{sen} x > 1$ (se $-(\cosh 4)\sin x = 1$ si avrebbe $y(x) = \operatorname{arccosh} 1 = 0$), ovvero

$$\operatorname{sen} x < -\frac{1}{\cosh 4}.$$

Avendosi allora chiaramente $-\frac{1}{\cosh 4} \in (-1, 0)$, sarà $\arcsin(-\frac{1}{\cosh 4}) = -\arcsin(\frac{1}{\cosh 4}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, e quindi $-\pi + \arcsin(\frac{1}{\cosh 4}) \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$. Osservando inoltre che, in base alla formula di addizione per il seno,

$$\sin\left(-\pi + \arcsin\frac{1}{\cosh 4}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{1}{\cosh 4} + \pi\right) = \sin\left(\arcsin\frac{1}{\cosh 4}\right) = \frac{1}{\cosh 4},$$

si deduce che le soluzioni della disequazione trigonometrica sono

$$-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right) + 2k\pi < x < -\arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy considerato è pertanto

$$I_0 = \left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right), -\arcsin\left(\frac{1}{\cosh 4}\right)\right),$$

che contiene il dato iniziale $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Consideriamo ora il caso [B].

Procedendo analogamente a prima, deve essere $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $y \neq 0$, e quindi $y(x) > 0$ per ogni $x \in I_0 \subset (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$. Calcolando allora gli integrali e tenendo conto del fatto che $\cos x < 0$ per ogni $x \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$ si trova

$$\log(\cosh y) = -\log(-\cos x) + c = \log\left(-\frac{1}{\cos x}\right) + c,$$

da cui $c = \log(\cosh 3)$ e

$$y(x) = \operatorname{arccosh}\left(-\frac{\cosh 3}{\cos x}\right).$$

L'intervallo massimale di esistenza si ottiene allora risolvendo la disequazione

$$-\frac{\cosh 3}{\cos x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > -\cosh 3$$

dove si è tenuto conto ancora del fatto che $\cos x < 0$ nell'intervallo di interesse. Poiché allora $\cosh 3 > 1$, si conclude che la disequazione è sempre verificata, e pertanto $I_0 = (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$.