Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17 febbraio 2025 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x-a|}{x-a-1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

$[a = (2, 3, 4, 5)$

Svolgimento. Il dominio di f è chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq a+1\}$ ed f è continua in D e non presenta simmetrie evidenti. Risulta poi chiaramente $f(x) \geq 0$ se $x \geq 0$, $x \neq a+1$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$.

Ricordando che $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, si vede subito che

$$\lim_{x\to(a+1)^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(a+1)^+} f(x) = +\infty.$$

e dunque la retta di equazione $x = a+1$ è asintoto verticale (destro) per il grafico di f. Inoltre si noti che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{a-x}{x-a-1}} = xe^{-1}e^{-\frac{1}{x-a-1}}, & x < a, \\ xe^{\frac{x-a}{x-a-1}} = xee^{\frac{1}{x-a-1}}, & x \geq a, \end{cases}$$

e dunque per $x \to +\infty$, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$,

$$f(x) = xee^{\frac{1}{x-a-1}} = xe\left(1 + \frac{1}{x-a-1} + o\left(\frac{1}{x-a-1}\right)\right) = xe + e\frac{x}{x-a-1} + o(1) = xe + e + o(1),$$

dove nella terza uguaglianza si è usato il fatto che $xo(\frac{1}{x-a-1}) = xo(\frac{1}{x}) = o(1)$, e nella quarta il fatto che $\frac{x}{x-a-1} = 1 + o(1)$. Pertanto $f(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$, e $y = e(x+1)$ è l'equazione dell'asintoto obliquo a $+\infty$. Analogamente, per $x \to -\infty$ si ha

$$f(x) = xe^{-1}e^{-\frac{1}{x-a-1}} = xe^{-1}\left(1 - \frac{1}{x-a-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = xe^{-1} - e^{-1} + o(1),$$

e pertanto $f(x) \to -\infty$ se $x \to -\infty$, e $y = e^{-1}(x-1)$ è l'equazione dell'asintoto obliquo a $-\infty$

Risulta poi:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{a-x}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2}\left(x^2 - (2a+1)x + (a+1)^2\right), & x < a, \\ \frac{e^{\frac{x-a}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2}\left(x^2 - (2a+3)x + (a+1)^2\right), & x > a, x \neq a+1. \end{cases}$$

In $x = a$ f non è derivabile per il corollario del teorema di Lagrange, poiché

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = 1 - a \qquad \lim_{x\to a^-} f'(x) = 1 + a$$

Quindi $x = a$ è un punto angoloso per il grafico di f. Inoltre, $\lim_{x\to(a+1)^-} f'(x) = 0$

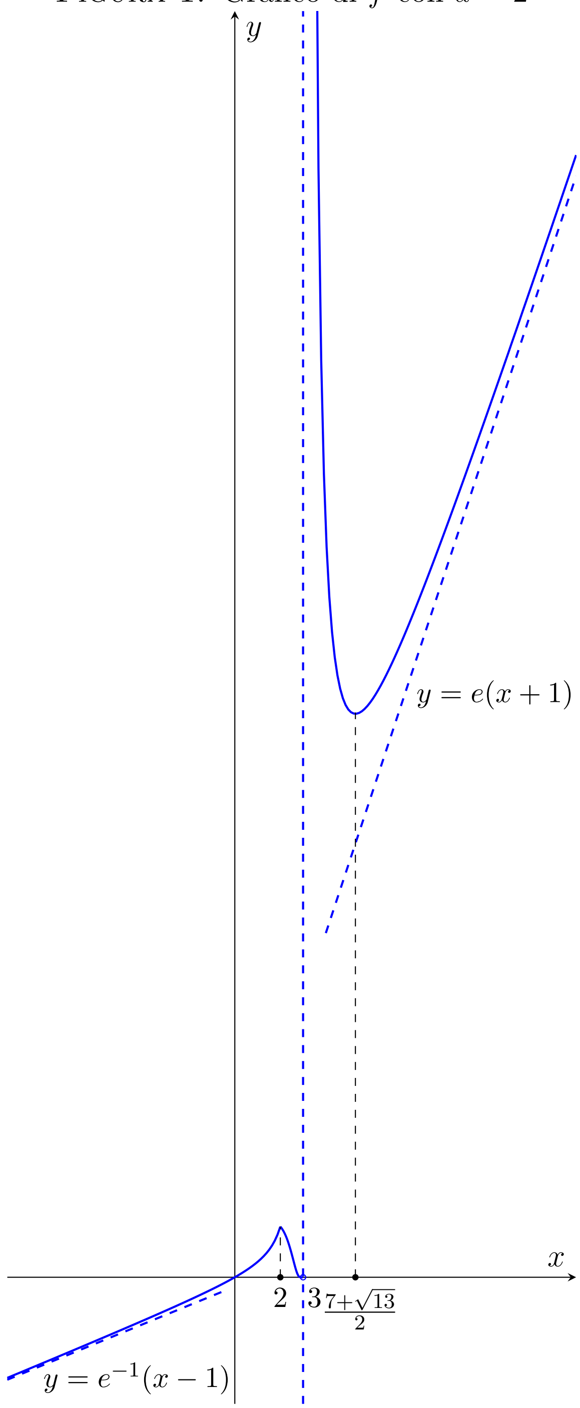
Per $x < a$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello del polinomio $x^2-(2a+1)x+(a+1)^2$ che ha discriminante $-4a-3<0$, quindi $f'(x)>0$ per $x<a$, cioè f è crescente in $(-\infty, a)$. Invece per $x>a$, $x \neq a+1$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $x^2-(2a+3)x+(a+1)^2$, che ha radici $x_\pm = \frac{2a+3\pm\sqrt{4a+5}}{2}$ che verificano $x_- < a < a+1 < x_+$, in quanto

$$\frac{2a+3-\sqrt{4a+5}}{2} < a \quad \Leftrightarrow \quad 3 < \sqrt{4a+5} \quad \Leftrightarrow \quad a > 1,$$

$$\frac{2a+3+\sqrt{4a+5}}{2} > a+1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4a+5} > -1.$$

Se ne deduce quindi che f è decrescente in $(a, a+1)$, e in $(a+1, x_+)$, mentre è crescente in $(x_+, +\infty)$, e che $x=a$ è punto di massimo relativo, mentre $x = x_+$ è punto di minimo relativo.

Figura 1. Grafico di f con $a=2$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Siano $a \in \mathbb{R}$ e

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < a \\ x(x-2) & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

(i) Determinare gli insiemi immagine $f((-\infty, a))$ e $f([a, +\infty))$.

(ii) Per quali valori di a f è iniettiva in $\mathbb{R}$?

(iii) Per quali valori di a f è suriettiva in $\mathbb{R}$?

(iv) Per quali valori di a f è biiettiva in $\mathbb{R}$?

Altre versioni ([B, C, D]):

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x > a \\ x(x+2) & \text{se } x \leq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < a \\ x(2-x) & \text{se } x \geq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > a \\ -x(x+2) & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$

Svolgimento (versione [A]).

(i) Per definizione $f((-\infty, a)) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x < a \,|\, f(x) = x - 1 = y\} = (-\infty, a-1)$. Inoltre il grafico di f nell'intervallo $[a, +\infty)$ è chiaramente l'arco di una parabola con asse la retta $x = 1$ e concavità rivolta verso l'alto, quindi in particolare f è continua in $[a, +\infty)$ e se $a < 1$, f è decrescente in $[a, 1]$ e crescente in $[1, +\infty)$, e quindi $\min_{[a,+\infty)} f = f(1) = -1$, mentre se $a \geq 1$, f è crescente in tutto $[a, +\infty)$ e quindi $\min_{[a,+\infty)} f = f(a) = a(a-2) = a^2 - 2a$. Inoltre in entrambi i casi $\sup_{[a,+\infty)} f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ricordando allora che una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore, si ha

$$f([a, +\infty)) = \left[\min_{[a,+\infty)} f, \sup_{[a,+\infty)} f\right) = \begin{cases} [-1, +\infty) & \text{se } a \leq 1 \\ [a^2 - 2a, +\infty) & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

(ii) Si noti che f è chiaramente iniettiva in $(-\infty, a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e che, per quanto detto al punto (i), f è iniettiva in $[a, +\infty)$ se e solo se $a \geq 1$. Perciò f è iniettiva in $\mathbb{R}$ se e solo se $a \geq 1$ e $f((-\infty, a)) \cap f([a, +\infty)) = \emptyset$ (poiché $y \in f((-\infty, a)) \cap f([a, +\infty))$ se e solo se esistono $x_1 \in (-\infty, a)$ e $x_2 \in [a, +\infty)$ tali che $f(x_1) = y = f(x_2)$). Ma, per il punto (i), se $a \geq 1$ si ha

$$f((-\infty, a)) \cap f([a, +\infty)) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (-\infty, a-1) \cap [a^2 - 2a, +\infty) = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \quad a - 1 \leq a^2 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 3a + 1 \geq 0,$$

ovvero se e solo se

$$a \geq \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(iii) Per definizione, f è suriettiva se $f(\mathbb{R}) = f((-\infty, a)) \cup f([a, +\infty)) = \mathbb{R}$ cioè, per il punto (i), se e solo se

$$\begin{cases} (-\infty, a-1) \cup [-1, \infty) = \mathbb{R} & \text{se } a \leq 1 \\ (-\infty, a-1) \cup [a^2 - 2a, +\infty) = \mathbb{R} & \text{se } a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 \geq -1 & \text{se } a \leq 1 \\ a - 1 \geq a^2 - 2a & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ a^2 - 3a + 1 \leq 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a \leq \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(iv) f è biiettiva in $\mathbb{R}$ se e solo se è iniettiva e suriettiva, ovvero, in base ai punti (ii) e (iii), se e solo se $a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z+\mathrm{i}a)^3 - \mathrm{i}a = 0$$

$[a = 8, 27, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}]$

Svolgimento. L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$(z+\mathrm{i}a)^3 = ia$$

Ponendo $w := z + \mathrm{i}a$, si ha $w^3 = \mathrm{i}a$, ed essendo $\mathrm{i}a = ae^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$, ponendo $w = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ si ha

$$\rho^3 e^{3i\theta} = ae^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = a^{\frac{1}{3}} \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Quindi si ottiene $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$, e le soluzioni dell'equazione $w^3 = \mathrm{i}a$ sono

$$w_1 = a^{\frac{1}{3}} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right), \; w_2 = a^{\frac{1}{3}} e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right), \; w_3 = a^{\frac{1}{3}} e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -a^{\frac{1}{3}}\mathrm{i}.$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione $(z + ia)^3 - ia = 0$ sono

$$z_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right) - \mathrm{i}a, \; z_2 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right) - \mathrm{i}a, \; z_3 = -a^{\frac{1}{3}}\mathrm{i} - \mathrm{i}a.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n}{\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento. Al denominatore, in base allo sviluppo $(1+t)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$, con $t = \frac{1}{n^4}$ si ha, per $n \to +\infty$,

$$\sqrt{a^2n^4 - a^2} = an^2\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}} = an^2\left(1 - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{8n^8} + o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right) = an^2 - \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Mentre usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$, con $t = \frac{1}{n^2}$ si ottiene per $n \to +\infty$,

$$-an^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = -an^2\left(1 - \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{24n^8} + o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right) = -an^2 + \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{24n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Pertanto il denominatore per $n \to +\infty$ si comporta come

$$\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{a}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Basta dunque sviluppare il numeratore a meno di termini $o(\frac{1}{n^6})$. Ricordando allora che, in base alle gerarchie di infniti e infinitesimi, $e^{-n^2} = o(\frac{1}{n^k})$ e $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{n^k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $\frac{1}{n^8}e^{-n^2} = o(\frac{1}{n^6})$ e $\frac{\sin n}{n!} = o(\frac{1}{n^6})$. Inoltre sfruttando le proprietà dei logaritmi e lo sviluppo $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, con $t = \frac{a^2}{n^6}$ si ha, per $n \to +\infty$,

$$\log\left(n + \frac{a^2}{n^5}\right) - \log n = \log\left(1 + \frac{a^2}{n^6}\right) = \frac{a^2}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Pertanto il numeratore per $n \to +\infty$ è

$$\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log\left(n + \frac{a^2}{n^5}\right) - \log n = \frac{a^2}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

e il limite richiesto vale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^2}{n^6} + o(\frac{1}{n^6})}{-\frac{a}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)} = -6a.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\beta = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento.*</u> Poiché $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione potrebbe essere illimitata sia per $x \to 0^+$ che per $x \to \frac{1}{a}^-$. Per $x \to 0^+$, si ha

$$\left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} \sim a^{\frac{\beta}{a}} x^{\frac{\beta}{a}} = a^{\frac{\beta}{a}} \frac{1}{x^{-\frac{\beta}{a}}},$$

e pertanto la funzione è integrabile vicino a zero se $-\frac{\beta}{a} < 1$, cioè $\beta > -a$.
Per $x \to \frac{1}{a}^-$ invece

$$\left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} \sim \frac{1}{(1-ax)^{\frac{\beta}{a}}},$$

quindi la funzione è integrabile vicino a $\frac{1}{a}$ se $\frac{\beta}{a} < 1$, cioè $\beta < a$. Perciò l'integrale è convergente se e solo se $|\beta| < a$.
Calcoliamo l'integrale per $\beta = \frac{a}{2}$, cioè:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx$$

(che è improprio solo per $x \to \frac{1}{a}$). Ponendo $t = \sqrt{\frac{ax}{1-ax}}$ si ha $x = \frac{t^2}{a(1+t^2)}$ e $dx = \frac{2t}{a(1+t^2)^2} dt$. Inoltre per $x = 0 \Rightarrow t = 0$, mentre per $x \to \frac{1}{a} \Rightarrow t \to +\infty$. Perciò otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^{\omega} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Poiché $\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, integrando per parti si ha:

$$\frac{1}{a} \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \int t \left(-\frac{1}{1+t^2}\right)' dt = -\frac{1}{a} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{a} \arctan t + C,$$

pertanto l'integrale richiesto vale

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^{\omega} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \lim_{\omega \to +\infty} \left(\frac{-\omega}{1+\omega^2} + \arctan \omega\right) = \frac{\pi}{2a}$$

<u>*Altra possibile sostituzione per il calcolo dell'integrale:*</u>

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx.$$

Si può effettuare la sostituzione $t = \sqrt{1-ax}$. Si ha $x = \frac{1}{a}(1-t^2)$ e $dx = -\frac{2t}{a} dt$. Inoltre per $x = 0 \Rightarrow t = 1$, mentre per $x \to \frac{1}{a} \Rightarrow t \to 0$. Perciò otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2}{a} \int_{\varepsilon}^{1} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{2}{a} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

(l'ultimo integrale non è improprio). Ponendo ora $t = \sin y$, si ha $dt = \cos y dy$ e otteniamo

$$\frac{2}{a}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2 dy = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2y))dy = \frac{\pi}{2a}.$$