Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17 febbraio 2025 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x-a|},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità.

$[a = -5, 5, -3, 3]$

Svolgimento. Consideriamo il caso $a > 0$ (se $a < 0$ basta sostituire $-x$ a x, ovvero riflettere il grafico rispetto all'asse verticale). Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-2a} & \text{se } x < a, \\ \sqrt{x^2-2x+2a} & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

Essendo allora

$$x^2+2x-2a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1-\sqrt{1+2a} \text{ o } x \geq -1+\sqrt{1+2a},$$
$$x^2-2x+2a \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ed essendo $-1+\sqrt{1+2a} < a$ (poiché equivale ad $a^2 > 0$), si ha che il dominio di f è

$$\begin{aligned} D &= \{x < a : x^2+2x-2a \geq 0\} \cup \{x \geq a : x^2-2x+2a \geq 0\} \\ &= \left(-\infty, -1-\sqrt{1+2a}\right] \cup \left[-1+\sqrt{1+2a}\right) \cup [a, +\infty) \\ &= \left(-\infty, -1-\sqrt{1+2a}\right] \cup \left[-1+\sqrt{1+2a}, +\infty\right) \end{aligned}$$

Inoltre $f(x) \geq f(-1 \pm \sqrt{1+2a}) = 0$ per ogni $x \in D$.
Evidentemente f è continua in D, e pertanto non ha asintoti verticali. Inoltre usando lo sviluppo $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+2a} = x\sqrt{1-\tfrac{2}{x}+\tfrac{2a}{x^2}} = x(1-\tfrac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})) = x-1+o(1) \quad \text{per } x \to +\infty,$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-2a} = |x|\sqrt{1+\tfrac{2}{x}-\tfrac{2a}{x^2}} = -x(1+\tfrac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})) = -x-1+o(1) \quad \text{per } x \to -\infty,$$

quindi il grafico di f ha le rette di equazioni $y = x-1$ e $y = -x-1$ come asintoti obliqui per, rispettivamente, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
La f è derivabile in $\left(-\infty, -1-\sqrt{1+2a}\right) \cup \left(-1+\sqrt{1+2a}, a\right) \cup (a, +\infty)$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2a}} & \text{se } x < -1-\sqrt{1+2a} \text{ o } -1+\sqrt{1+2a} < x < a \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2a}} & \text{se } x > a. \end{cases}$$

Essendo poi

$$f'_-(-1-\sqrt{1+2a}) = \lim_{x\to(-1-\sqrt{1+2a})^-} f'(x) = -\infty, \quad f'_+(-1+\sqrt{1+2a}) = \lim_{x\to(-1+\sqrt{1+2a})^+} f'(x) = +\infty,$$

si vede che $x = -1 \pm \sqrt{1+2a}$ sono punti a tangente verticale per il grafico di f, mentre essendo

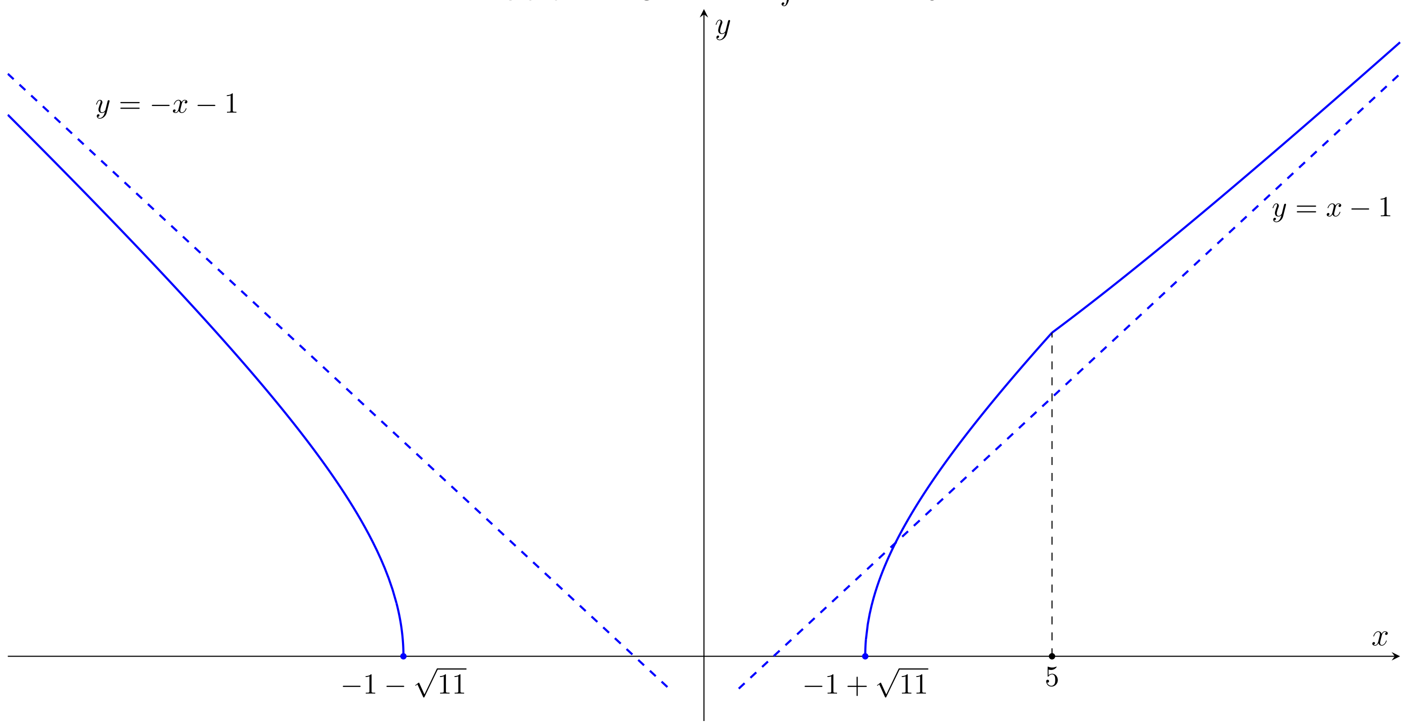
$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = \tfrac{a+1}{a}, \quad f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \tfrac{a-1}{a},$$

si ha che $x = a$ è un punto angoloso per il grafico di f. In particolare f non è derivabile in $x = -1 \pm \sqrt{1+2a}$ e in $x = a$.
Essendo $-1-\sqrt{1+2a} < -1 < -1+\sqrt{1+2a}$ e $a > 1$, segue che $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1-\sqrt{1+2a})$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-1+\sqrt{1+2a}, a) \cup (a, +\infty)$, quindi f è decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{1+2a})$ e crescente in $(-1+\sqrt{1+2a}, a)$ e in $(a, +\infty)$; i punti $x = -1 \pm \sqrt{1+2a}$ sono di minimo (assoluto).
Infine

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1+2a}{(x^2+2x-2a)^{3/2}} < 0 & \text{se } x < -1-\sqrt{1+2a} \text{ o } -1+\sqrt{1+2a} < x < a \\ \frac{2a-1}{(x^2-2x+2a)^{3/2}} > 0 & \text{se } x > a. \end{cases}$$

Perciò f è concava negli intervalli $(-\infty, -1-\sqrt{1+2a}]$ e $[-1+\sqrt{1+2a}, a)$, e convessa in $(a, +\infty)$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 5$



.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \log(1+x) + ax}{x^\alpha(1 + bx^2 + e^{-1/x})}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$[(a, b) = (3, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 1)]$

Svolgimento.
La funzione integranda è continua in $(0, +\infty)$, si deve quindi studiare il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0^+$ si ha, ricordando che $\log(1 + x) = x + o(x)$ per $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{x} + \log(1+x) + ax}{x^\alpha(1 + bx^2 + e^{-1/x})} = \frac{\sqrt{x} + (a+1)x + o(x)}{x^\alpha(1 + o(1))} = \frac{\sqrt{x}(1 + o(1))}{x^\alpha(1 + o(1))} \sim \frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{2}}}.$$

Perciò l'integrale è convergente per $x \to 0^+$ se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$, ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$.
Per $x \to +\infty$ invece si ha, per la gerarchia degli infiniti,

$$\frac{\sqrt{x} + \log(1+x) + ax}{x^\alpha(1 + bx^2 + e^{-1/x})} = \frac{ax(1 + o(1))}{bx^\alpha x^2(1 + o(1))} \sim \frac{a}{bx^{\alpha+1}}.$$

Perciò l'integrale è convergente per $x \to +\infty$ se e solo se $\alpha + 1 > 1$, ovvero $\alpha > 0$.
In conclusione, l'integrale converge in $(0, +\infty)$ se e solo se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [6 punti] Determinare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 di $\log(1 + a \sin x + bx^2)$.
$[(a, b) = (2, -3), (-2, 3), (-2, -3), (2, 3)]$

Svolgimento. Si ha che, per $y \to 0$,

$$\sin y = y - \tfrac{1}{6}y^3 + o(y^4), \qquad \log(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + o(y^4).$$

Perciò, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\log(1 + a\sin x + bx^2) &= \log\left(1 + ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4)\right) \\ &= ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4) - \tfrac{1}{2}(ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3}(ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^3 - \tfrac{1}{4}(ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Inoltre sviluppando il quadrato fino a termini $o(x^4)$:

$$(ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^2 = a^2x^2 + 2abx^3 + (-\tfrac{1}{3}a^2 + b^2)x^4 + o(x^4),$$

mentre usando gli sviluppi $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ per $t \to 0$, con $\alpha = 3, 4$,

$$\begin{aligned}(ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^3 &= a^3x^3\left(1 + \tfrac{b}{a}x - \tfrac{1}{6}x^2 + o(x^3)\right)^3 \\ &= a^3x^3(1 + \tfrac{3b}{a}x + o(x)) = a^3x^3 + 3a^2bx^4 + o(x^4), \\ (ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 + o(x^4))^4 &= a^4x^4\left(1 + \tfrac{b}{a}x - \tfrac{1}{6}x^2 + o(x^3)\right)^4 = a^4x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\log(1 + a\sin x + bx^2) &= ax + bx^2 - \tfrac{1}{6}ax^3 - \tfrac{1}{2}(a^2x^2 + 2abx^3 + (-\tfrac{1}{3}a^2 + b^2)x^4) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}(a^3x^3 + 3a^2bx^4) - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + o(x^4) \\ &= ax + (b - \tfrac{1}{2}a^2)x^2 + (-\tfrac{1}{6}a - ab + \tfrac{1}{3}a^3)x^3 + (\tfrac{1}{6}a^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4)x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per l'unicità nel Teorema di Peano, il polinomio richiesto è

$$ax + (b - \tfrac{1}{2}a^2)x^2 + (-\tfrac{1}{6}a - ab + \tfrac{1}{3}a^3)x^3 + (\tfrac{1}{6}a^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4)x^4.$$

Nelle 4 versioni:

$$\begin{aligned}&2x - 5x^2 + \tfrac{25}{3}x^3 - \tfrac{119}{6}x^4 \\ &-2x + x^2 + \tfrac{11}{3}x^3 + \tfrac{25}{6}x^4 \\ &-2x - 5x^2 - \tfrac{25}{3}x^3 - \tfrac{119}{6}x^4 \\ &2x + x^2 - \tfrac{11}{3}x^3 + \tfrac{25}{6}x^4\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y^2 - a^2)}{x^2 - a^2} \\ y(0) = \dfrac{a}{2} \qquad \text{e } y(0) = a \end{cases}.$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza di ognuna delle soluzioni.

<u>*Svolgimento:*</u> L'equazione differenziale è a variabili separabili, definita per $x \neq \pm a$. Poiché la condizione iniziale, in entrambi i casi, è posta in $x_0 = 0 \in (-a, a)$, i problemi di Cauchy hanno entrambi senso nell'intervallo $I = (-a, a)$ che quindi deve contenere l'intervallo massimale di esistenza di ognuna delle soluzioni. Inoltre, poiché ognuno dei due problemi di Cauchy ha soluzione unica, e $y(x) = a$ e $y(x) = -a$ per ogni $x \in I$ sono soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale, la soluzione del problema di Cauchy relativa alla condizione iniziale $y(0) = a$ è la soluzione stazionaria $y(x) = a$ definita in tutto I, mentre la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = \frac{a}{2}$, non potendo intersecare le soluzioni stazionarie, verificherà $|y(x)| < a$, e sarà definita in un intervallo massimale contenuto in I. Per determinarla, possiamo dunque dividere entrambi i membri dell'equazione differenziale per $y^2 - a^2$ e integrare entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{y^2 - a^2} dy = \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx\,.$$

Il primo integrale è

$$\int \frac{1}{y^2 - a^2} dy = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{y - a} - \frac{1}{y + a} \right) dy = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{y - a}{y + a} \right| + C$$

e, analogamente, il secondo integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right|,$$

e pertanto la soluzione del problema di Cauchy considerato sarà ottenuta risolvendo l'equazione

$$\log \left| \frac{y - a}{y + a} \right| + 2aC = \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right|.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, abbiamo $C = -\frac{1}{2a} \log 13 = \frac{1}{2a} \log 3$. Poiché inoltre in base a quanto detto sopra

$$|y| < a \quad \Rightarrow \quad \frac{y - a}{y + a} < 0, \qquad |x| < a \quad \Rightarrow \quad \frac{x - a}{x + a} < 0$$

si vede che la soluzione cercata è determinata dall'equazione

$$\log \left(\frac{a - y}{y + a} \right) + \log 3 = \log \left(\frac{3(a - y)}{y + a} \right) = \log \left(\frac{a - x}{x + a} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(a - y)}{y + a} = \frac{a - x}{x + a} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{a(2x + a)}{x + 2a}.$$

Quindi anche la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = \frac{a}{2}$ è definita in tutto l'intervallo I.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [6 punti] Mettere le seguenti tre funzioni in ordine di infinito crescente per $x \to 1^-$:

$$[A]: \qquad \frac{1}{1-\sqrt[6]{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi x)}}, \quad \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - \log x + 2x - \frac{3}{2}}$$

$$[B]: \qquad \frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}}, \quad \frac{1}{-\frac{9}{2} + 6x - 3\log x - \frac{3}{2}x^2}$$

$$[C]: \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi x)}}, \quad \frac{1}{-2\log x - x^2 + 4x - 3}$$

$$[D]: \qquad \frac{1}{1-\sqrt[5]{x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}}, \quad \frac{1}{4x - 3 - 2\log x - x^2}.$$

Svolgimento (versione $[C]$).
Si pone $y = 1 - x$. Allora $y \to 0^+$ per $x \to 1^-$ e $x = 1 - y$. Perciò in base allo sviluppo $(1-y)^{2/3} = 1 - \frac{2}{3}y + o(y)$ per $y \to 0$ si ha che, per $x \to 1^-$,

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{1-(1-y)^{2/3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}y(1+o(1))} \sim \frac{3}{2y} = \frac{3}{2(1-x)};$$

inoltre usando la formula di addizione per il seno e l'equivalenza $\sin t \sim t$ per $t \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(\pi x)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi - \pi y)}} = \frac{1}{\sqrt{-\sin(-\pi y)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi y)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-x)^{1/2}};$$

infine in base allo sviluppo $\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$ per $y \to 0$,

$$\frac{1}{-2\log x - x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{-2\log(1-y) - (1-y)^2 + 4(1-y) - 3}$$
$$= \frac{1}{-2(-y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)) - 2y - y^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}y^3(1+o(1))} \sim \frac{3}{2y^3} = \frac{3}{2(1-x)^3}.$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1 < 3$, l'ordine richiesto è

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(\pi x)}}, \quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{1}{-2\log x - x^2 + 4x - 3}.$$