Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta dell'1 settembre 2025

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{|e^x - a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso.
$[a = 3, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}]$.

Svolgimento:
Poiché chiaramente $|e^x - a| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre, essendo l'esponenziale, il modulo e la radice funzioni continue, f è anche continua su $\mathbb{R}$. Dunque il suo grafico non ha asintoti verticali. Si ha poi, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = e^{-x}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{|1 - ae^{-x}|} \sim e^{-x}e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \to 0,$$

e pertanto la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per il grafico di f per $x \to +\infty$, mentre per $x \to -\infty$

$$f(x) \sim \sqrt{a}e^{-x} \to +\infty, \qquad \frac{f(x)}{x} \sim \sqrt{|a|}\frac{e^{-x}}{x} \to +\infty,$$

(l'ultimo limite segue dalla gerarchia degli infinitesimi e infiniti) e dunque il grafico di f non ha asintoti orizzontali né obliqui per $x \to -\infty$.
La funzione è derivabile per ogni $x \neq \log a$, e per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{|e^x - a|}}(-2|e^x - a| + e^x\operatorname{sign}(e^x - a)) = \frac{e^{-x}(2a - e^x)}{2\sqrt{|e^x - a|}}\operatorname{sign}(e^x - a)$$

$$= \begin{cases} \frac{2ae^{-x}-1}{2\sqrt{|e^x-a|}} & \text{se } x > \log a, \\ \frac{-2ae^{-x}+1}{2\sqrt{|e^x-a|}} & \text{se } x < \log a, \end{cases}$$

dove nella seconda uguaglianza si è usato il fatto che $|t| = (\operatorname{sign} t)t$. Inoltre

$$\lim_{x \to (\log a)^-} f'(x) = \lim_{x \to (\log a)^-} \frac{-2ae^{-x} + 1}{2\sqrt{|e^x - a|}} = -\infty, \qquad \lim_{x \to (\log a)^+} f'(x) = \lim_{x \to (\log a)^+} \frac{2ae^{-x} - 1}{2\sqrt{|e^x - a|}} = +\infty,$$

da cui si vede che il grafico di f ha una cuspide in $x = \log a$.
Per $x < \log a$ si ha

$$f'(x) > 0 \iff 2ae^{-x} < 1 \iff x > -\log\frac{1}{2a} = \log(2a) > \log a,$$

e dunque $f'(x) < 0$, cioè f è decrescente, in $(-\infty, \log a)$. Per $x > \log a$ si ha invece

$$f'(x) > 0 \iff 2ae^{-x} > 1 \iff x < -\log\frac{1}{2a} = \log(2a)$$

e dunque f è crescente in $(\log a, \log(2a))$ e decrescente in $(\log(2a, +\infty)$. In particolare $x = \log a$ è il punto di minimo assoluto di f (poiché chiaramente $f(x) \geq 0 = f(\log a)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), mentre $x = \log(2a)$ è un punto di massimo relativo, ma non assoluto (poiché come visto $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$).
La derivata seconda vale, per $x \neq \log a$,

$$f''(x) = \frac{4a^2e^{-x} - 6a + e^x}{4(|e^x - a|)^{\frac{3}{2}}},$$

e pertanto

$$f''(x) > 0 \iff 4a^2e^{-x} - 6a + e^x > 0 \iff e^{2x} - 6ae^x + 4a^2 > 0$$

e posto allora $t = e^x$, poiché

$$t^2 - 6at + 4a^2 > 0 \iff t < (3 - \sqrt{5})a \text{ o } t > (3 + \sqrt{5})a,$$

si deduce che f ha due flessi in $x = \log((3-\sqrt{5})a)$ e $x = \log((3+\sqrt{5})a)$, ed è convessa in $(-\infty, \log((3-\sqrt{5})a)$ e in $(\log((3+\sqrt{5})a), +\infty)$, concava altrove. Bisogna infine osservare che $3-\sqrt{5} < 1$ e $3+\sqrt{5} > 2$ e quindi, per la monotonia del logaritrmo,

$$\log((3-\sqrt{5})a) < \log a < \log(2a) < \log((3+\sqrt{5})a).$$

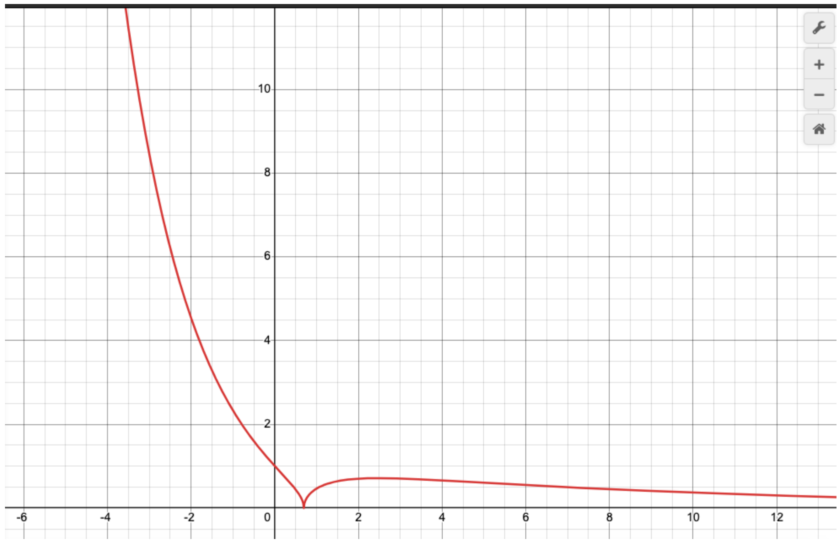

FIGURE 1. Grafico di f per $a = 2$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}}}{e^{-n} \pm \sin^2(\frac{1}{n})}$$

[$a = 2, 3$ (con segno $+$ al denominatore, $a = -2, -3$ con segno $-$ davanti a $\sin^2(\frac{1}{n})$]

Svolgimento: Riguardo il denominatore, si ha come noto dalla gerarchia degli infinitesimi $e^{-n} = o(n^{-k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e allora dallo sviluppo $\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0$ si vede che

$$e^{-n} \pm \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n} \pm \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \pm\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Bisogna quindi sviluppare il numeratore a meno di termini $o(\frac{1}{n^2})$. Essendo allora $\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{a}{n^2}\right)}$, e usando gli sviluppi $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$, valutiamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n &= e^{n\log\left(1+\frac{a}{n^2}\right)} \\ &= e^{n\left(\frac{a}{n^2} - \frac{a^2}{2n^4} + o(n^{-4})\right)} = e^{\frac{a}{n} + o(n^{-2})} \\ &= 1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

e sviluppando poi $\sqrt{\frac{n+2a}{n}} = \sqrt{1+\frac{2a}{n}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{2a}{n} - \frac{1}{8}\frac{4a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, il numeratore si stima come

$$\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}} = \frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e si conclude

$$\frac{\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n - \sqrt{\frac{n+2a}{n}}}{e^{-n} \pm \sin^2(\frac{1}{n})} \sim \frac{\frac{a^2}{n^2}}{\pm\frac{1}{n^2}} \to \pm a^2.$$

Esercizio 3. [7 punti]
Discutere l'esistenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

$[a = 2, b = -2;\ a = 3, b = -1;\ a = 2, b = 1;\ a = 3, b = 1]$

Svolgimento:

Convergenza:
Poiché si ha $\cos x - \cos(2x) = -(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0$ se e solo se $\cos x = 1$ o $\cos x = -\frac{1}{2}$, che equivale a $x = 2k\pi$ o $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ o $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si vede che l'integrale dato può essere singolare solo nell'intorno di $x = 0$. Usando allora gli sviluppi $\sin t = t + o(t)$ e $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$ si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))^\alpha} &= \frac{a(x + o(x))^3 + b(2x + o(x))(x + o(x))^2}{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + 2x^2 + o(x^2)\right)^\alpha} \\ &= \frac{(a + 2b)x^3 + o(x^3)}{(\frac{3}{2}x^2 + o(x^2))^\alpha} = \frac{(a + 2b)x^3(1 + o(1))}{(\frac{3}{2})^\alpha x^{2\alpha}(1 + o(1))} \sim \frac{(a + 2b)}{(3/2)^\alpha x^{2\alpha - 3}},\end{aligned}$$

che è integrabile se e solo se $2\alpha - 3 < 1$ ovvero $\alpha < 2$.

Calcolo dell'integrale:
Usando le formule di duplicazione si ha

$$\frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{\cos(x) - \cos(2x)} = \frac{(\sin x)^3(a + 2b\cos x)}{\cos(x) - 2\cos^2 x + 1} = \frac{(1 - \cos^2 x)(a + 2b\cos x)}{\cos(x) - 2\cos^2 x + 1}\sin x$$

e usando allora la sostituzione $y = \cos x$ si ha

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(\sin x)^3 + b\sin(2x)\sin^2 x}{(\cos(x) - \cos(2x))} dx = -\int_0^1 \frac{(1 - y^2)(a + 2by)}{2y^2 - y - 1} dy = \int_0^1 \frac{(1 - y^2)(a + 2by)}{(1 - y)(2y + 1)} dy \\ &= \int_0^1 \frac{2by^2 + (a + 2b)y + a}{(2y + 1)} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(a - b)}{(2y + 1)} dy + \frac{1}{2}\int_0^1 (a + b + 2by) dy \\ &= \frac{a - b}{4}\log(|2y + 1|) + \frac{1}{2}(a + b)y + b\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a - b}{4}\log 3 + \frac{1}{2}(a + 2b),\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata la fattorizzazione $2y^2 - y - 1 = 2(y - 1)(y + \frac{1}{2})$ (già vista sopra) e nella quarta l'algoritmo di Euclide di divisione dei polinomi.

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{1+ae^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione a variabili separabili definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \geq 0$, con la sola soluzione stazionaria $y = 0$. Dunque, poiché il dato iniziale è $y_0 = 1 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy considerato sarà tale che $y(x) > 0$ per ogni x nell'intervallo massimale di esistenza.
Separando e integrando si ha allora

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{1+ae^x} = (t = e^x) = \int \frac{1}{t(1+at)} dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{a}{1+at}\right) dt = \log\left(\frac{t}{1+at}\right) + C,$$

da cui

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = C + \log\left(\frac{e^x}{1+ae^x}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $C = \log(1+a) - 2$, da cui

$$\frac{2}{\sqrt{y}} = 2 - \log\left(\frac{e^x(1+a)}{1+ae^x}\right)$$

e infine

$$y = \left(\frac{2}{2 - \log\left(\frac{e^x(1+a)}{1+ae^x}\right)}\right)^2.$$

Esercizio 5. [5 punti]
Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^4 + a|z^2| + b = 0$$

$[a = 4, b = 2;\ a = -2, b = -1;\ a = 2, b = 1;\ a = -4, b = -2]$

Svolgimento: Usando $|z^2| = |z|^2$, e scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ si avrà

$$\rho^4 e^{4i\theta} = -a\rho^2 - b$$

e il termine a destra è un numero reale. A seconda delle varianti si avranno allora i casi seguenti.

(i) Caso $a, b < 0$. Si ha $-a\rho^2 - b > 0$ e pertanto il suo argomento è 0, e quindi

$$\rho^4 = -a\rho^2 - b\,, \quad 4\theta = 2k\pi\,.$$

L'equazione quadratica dà $\rho^2 = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ma la radice negativa va scartata. Quindi si hanno le soluzioni

$$z_k = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}e^{ik\frac{\pi}{2}}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

(ii) Caso $a, b > 0$. Si ha $-a\rho^2 - b < 0$, da cui $-a\rho^2 - b = (a\rho^2 + b)e^{i\pi}$ e si ottengono le equazioni

$$\rho^4 = a\rho^2 + b\,, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi\,,$$

le cui soluzioni (ammissibili) forniscono

$$z_k = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$