Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 10 luglio 2025

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right)\right|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Lo studio della derivata seconda non è necessario.

Suggerimento: può essere utile dimostrare la relazione $\frac{x^3}{1+x^6} < 1$ *per* $x > 0$.
$[a = 8, 6, 4, 3]$

Svolgimento:

Dominio: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ è definita per ogni x poiché il suo denominatore x^6+1 è sempre strettamente positvo (è maggiore o uguale ad 1). Le funzioni sin e *valore assoluto* sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Pertanto il dominio di f è $\mathbb{R}$.

Simmetria: La funzione è pari infatti, ricordando che il seno è dispari,

$$f(-x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{(-x)^3}{1+(-x)^6}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{-x^3}{1+x^6}\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right)\right| = f(x).$$

Possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \geq 0$.

Continuità: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ è continua su $\mathbb{R}$ così come sin e *valore assoluto*. La funzione f è pertanto continua nel suo dominio $\mathbb{R}$ in quanto composizione di funzioni continue.

Asintoti: Poiché f è continua nel suo dominio $\mathbb{R}$, il suo grafico non avrà asintoti verticali. Ci basterà allora studiare il comportamento a $+\infty$. Si ha chiaramente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x^6} = 0,$$

e quindi, per continuità,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = |\sin(0)| = 0,$$

da cui segue che il grafico di f ha la retta di equazione $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Derivabilità e calcolo della derivata: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ e sin sono derivabili su $\mathbb{R}$. L'unico punto in cui in cui la derivabilità di f va studiata a parte è quando l' argomento del valore assoluto è nullo, ovvero quando

$$\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) = 0.$$

Prima di calcolare la derivata, conviene discutere il valore assoluto. A tal scopo, ricordiamo che $\sin t > 0$ se e solo se $2k\pi < t < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A questo punto possiamo usare il suggerimento. Notiamo che

$$\frac{x^3}{1+x^6} < 1 \iff x^6 - x^3 + 1 > 0,$$

ponendo $y = x^3$ abbiamo che $x^6 - x^3 + 1 > 0$ se e solo se $y^2 - y + 1 > 0$ che è verificato per ogni y in quanto $y^2 - y + 1$ è polinomio di secondo grado con discriminante negativo. Otteniamo quindi che, per ogni $x \geq 0$,

$$0 \leq \frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6} < \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right), \qquad x \geq 0,$$

e
$$\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) = 0 \iff \frac{x^3}{1+x^6} = 0 \iff x = 0,$$
Concludendo la funzione f è derivabile per ogni $x \neq 0$ e la derivabilità in $x = 0$ è da studiare a parte.

La derivata per $x > 0$ vale allora:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{x^3}{1+x^6}\right)' \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) \\ &= \frac{\pi}{a}\frac{3x^2(1+x^6) - 6x^8}{(1+x^6)^2}\cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) \\ &= \frac{3\pi}{a}\frac{x^2(1-x^6)}{(1+x^6)^2}\cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right). \end{aligned}$$
Inoltre essendo chiaramente
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$
e, per simmetria,
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$
si deduce che f è derivabile anche in $x = 0$ con derivata nulla.

Monotonia e punti estremali: Ricordando che $\cos t > 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se vede che il segno della derivata è dato solo dal termine $(1 - x^6)$, in quanto, in base a quanto visto sopra, per $x > 0$ si ha
$$0 < \frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6} < \pi/2 \implies \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) > 0.$$
Tenendo conto anche della parità, avremo pertanto che f è crescente su $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ e decrescente altrimenti, e che ha quindi un massimo globale in $x = 1$ (e $x = -1$) ed un minimo globale in $x = 0$, dove $f(0) = 0$.

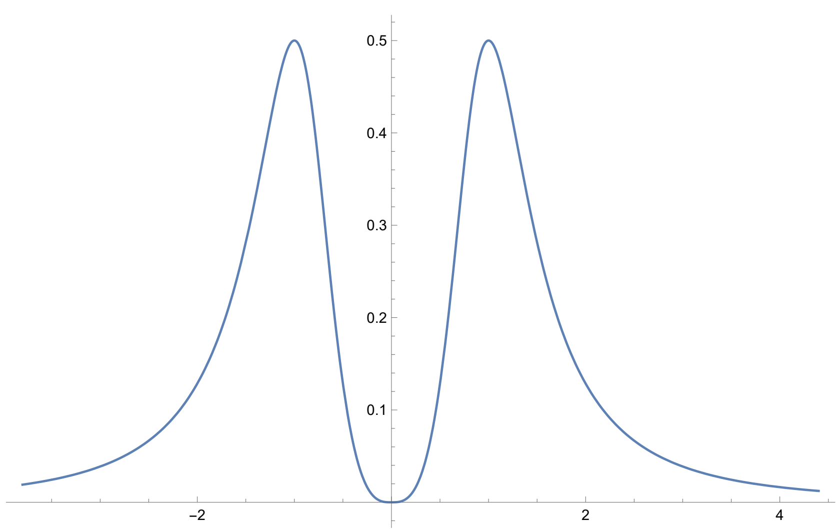

FIGURE 1. Grafico di f per $a = 3$

Esercizio 2. [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta \, dx.$$

al variare del parametro β e calcolarlo per $\beta = 1$.

Suggerimento: puó essere utile (ma non necessaria) la relazione $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, $x > 0$.

$[\alpha = 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Svolgimento:

Convergenza: La funzione integranda è continua in $x = 0$, pertanto è necessario studiare la convergenza solo per $x \to +\infty$. Dalla formula $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ e dallo sviluppo $\arctan t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$ abbiamo, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}(\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta &= (\arctan(1/x) - \arctan(1/(x+\alpha)))^\beta \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\alpha} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{(x+\alpha)^2}\right)\right)^\beta.\end{aligned}$$

Inoltre dallo sviluppo $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ per $t \to 0$ si ha, sempre per $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\alpha/x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$o\left(\frac{1}{(x+\alpha)^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{(1+\alpha/x)^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}(1+o(1))\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

e pertanto

$$(\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta = \left(\frac{\alpha}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^\beta = \frac{\alpha^\beta}{x^{2\beta}}(1+o(1))^\beta \sim \frac{\alpha^\beta}{x^{2\beta}}.$$

Dunque, per il teorema del confronto asintotico, la funzione $x \mapsto (\arctan(x+1) - \arctan(x))^\beta$ è integrabile su $[0, +\infty)$ se e solo se $\beta > 1/2$.

Calcolo dell'integrale: Per determinare la primitiva della funzione integranda, si può integrare per parti:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c,$$

ed analogamente, con la sostituzione $y = x + \alpha$,

$$\begin{aligned}\int \arctan(x+\alpha)\, dx = \int \arctan y \, dy &= y \arctan y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) + c \\ &= (x+\alpha)\arctan(x+\alpha) - \frac{1}{2}\log(1+(x+\alpha)^2) + c.\end{aligned}$$

Dunque, usando quanto visto nello studio della convergenza,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta \, dx \\ &\quad = \lim_{r\to+\infty} \left[(x+\alpha)\arctan(x+\alpha) - x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+(x+\alpha)^2}{1+x^2}\right)\right]_0^r \\ &\quad = \lim_{r\to+\infty} r(\arctan(r+\alpha) - \arctan r) + \alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\arctan\alpha + \frac{1}{2}\log(1+\alpha^2) \\ &\quad = \lim_{r\to+\infty} r\left(\frac{\alpha}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)\right) + \alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\arctan\alpha + \frac{1}{2}\log(1+\alpha^2) = \alpha\frac{\pi}{2} - \alpha\arctan\alpha + \frac{1}{2}\log(1+\alpha^2).\end{aligned}$$

Secondo i valori di α, avremo allora

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+2) - \arctan(x))\,dx = \pi - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln(5), \qquad \text{per } \alpha = 2$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+3) - \arctan(x))\,dx = \frac{3}{2}\pi - 3\arctan 3 + \frac{1}{2}\ln(10), \qquad \text{per } \alpha = 3,$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\sqrt{2}) - \arctan(x))\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(3), \qquad \text{per } \alpha = \sqrt{2},$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\sqrt{3}) - \arctan(x))\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \ln(2), \qquad \text{per } \alpha = \sqrt{3}.$$

Metodo alternativo. Poniamo, per $A > 0$, $F(A) = \int_0^A (\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))\,dx$. Allora

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^A \arctan(x+\alpha)\,dx - \int_0^A \arctan(x)\,dx \\ &= \int_\alpha^{A+\alpha} \arctan(x)\,dx - \int_0^A \arctan(x)\,dx \\ &= \int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\,dx - \int_0^\alpha \arctan(x)\,dx. \end{aligned}$$

Il primo termine tende a $\pi/2$. Infatti la funzione arctan è crescente e, per ogni $x \in [A, A+\alpha]$, abbiamo

$$\arctan A \leq \arctan x \leq \arctan(A+\alpha).$$

Per integrazione (o per il Teorema del Valore Medio), abbiamo

$$\alpha \arctan A \leq \int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\,dx \leq \alpha \arctan(A+\alpha).$$

Ma $\arctan(A) \to \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(A+\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ quando $A \to +\infty$. Per il Teorema dei Carabinieri, ne deduciamo che $\int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\,dx$ tende a $\alpha\frac{\pi}{2}$.

Il secondo termine si ottiene integrando per parti. Infatti,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \arctan(x)\,dx = {}& [x\arctan x]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ ={}& \alpha\arctan\alpha - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^\alpha \\ ={}& \alpha\arctan\alpha - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2). \end{aligned}$$

Esercizio 3. [6 punti] Risolvere il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = \frac{2}{1-x^2} y + (1+x)e^x \\ y(2) = a \end{cases}$$

$[a = 3, 6, 9, 12]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine non omogenea, definita per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Poiché il dato iniziale del problema di Cauchy è in $x_0 = 2 \in (1, +\infty)$, anche la soluzione sarà definita in $(1, +\infty)$, e sarà data dalla formula

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{1-x^2} dx} \left(c + \int e^{-\int \frac{2}{1-x^2} dx} (1+x)e^x \, dx \right).$$

Si ha allora (a meno della costante additiva)

$$\int \frac{2}{1-x^2} \, dx = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \log|1+x| - \log|1-x| = \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right),$$

dove nell'ultima uguaglianza si è tenuto conto del fatto che $\frac{1+x}{1-x} < 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Dunque, integrando per parti,

$$\int e^{-\int \frac{2}{1-x^2} dx} (1+x)e^x = \int (x-1)e^x \, dx = (x-1)e^x - \int e^x \, dx = (x-2)e^x,$$

e quindi

$$y(x) = \frac{x+1}{x-1}(c + (x-2)e^x),$$

ed imponendo la condizione iniziale si trova $a = 3c$. In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x+1}{x-1} \left((x-2)e^x + \frac{a}{3} \right), \qquad x > 1.$$

Esercizio 4. [5 punti]
Consideriamo i numeri complessi:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i, \qquad \text{e } z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

(1) Scrivere z_3 in forma cartesiana.
(2) Scrivere z_3 in forma trigonometrica.
(3) Dedurre i valori esatti di $\cos\frac{\pi}{12}$ e $\sin\frac{\pi}{12}$.

[varianti con $z_1 = 1 \pm i\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 \pm i$]

Svolgimento: Vediamo lo svolgimento con $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 + i$.
(1) Moltiplichiamo e dividiamo per il complesso coniugato del denominatore:

$$z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i.$$

(2) In forma esponenziale $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$, e abbiamo $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, e pertanto gli argomenti θ_j sono determinati dalle equazioni

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}, \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

da cui

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\pi/3 - \pi/4)} = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)).$$

(3) Dalla scrittura trigonometrica del punto (2), otteniamo un'altra scrittura cartesiana di z_3:

$$(*) \qquad z_3 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Confrontandola con quella ottenuta in (1), ne deduciamo che

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Negli altri casi il procedimento è lo stesso. Nei due casi in cui $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i$ oppure $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i$ si ottiene in $(*)$ una scrittura in termini di $\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ e $\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)$. Ci si riconduce allo stesso risultato osservando che

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{6}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$$

e

$$\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{12}.$$

Esercizio 5. [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax) + \frac{3a}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2}$$

$[a = \sqrt{2}, 1, 2, \frac{1}{2}\ ]$

Svolgimento: Al denominatore, usando lo sviluppo $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+o(t)$ per $t\to 0$, per $x \to 0$ abbiamo

$$2\sqrt{1-x^5}-2 = 2\left(1-\frac{x^5}{2}+o(x^5)\right)-2 = -x^5+o(x^5)$$

Bisogna dunque espandere il numeratore fino a meno di termini $o(x^5)$. Ricordando che $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{a(\alpha-1)}{2}t^2+o(t^2)$ e che $\arctan t = t-\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$ per $t\to 0$, si ha, per $x \to 0$:

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$
$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+o(x^5)$$
$$\arctan(ax) = ax-\frac{a^3}{3}x^3+o(x^3),$$

dove è sufficiente sviluppare $\arctan(ax)$ al terzo ordine perché per quanto appena scritto $\cos x - \frac{1}{1-x^2}$ è di ordine x^2. Sostituendo abbiamo

$$\begin{aligned}
&\left(\cos(x)-\frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax)+\frac{3a}{2}x^3\\
&= \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-(1+x^2+x^4)+o(x^4)\right)\left(ax-\frac{a^3}{3}x^3+o(x^3)\right)+\frac{3a}{2}x^3\\
&= \left(-\frac{3}{2}x^2-\frac{23}{24}x^4+o(x^4)\right)\left(ax-\frac{a^3}{3}x^3+o(x^3)\right)+\frac{3a}{2}x^3\\
&= -\frac{3a}{2}x^3+\frac{a^3}{2}x^5-\frac{23a}{24}x^5+\frac{3a}{2}x^3+o(x^5)\\
&= \frac{12a^3-23a}{24}x^5+o(x^5).
\end{aligned}$$

Il risultato è dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax) + \frac{3a}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{23a-12a^3}{24}.$$

In conclusione secondo i valori di a, avremo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(\sqrt{2}x) + \frac{3}{\sqrt{2}}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = -\frac{\sqrt{2}}{24}, \quad (a=\sqrt{2}),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(x) + \frac{3}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{11}{24}, \quad (a=1)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(2x) + 3x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = -\frac{25}{12}, \quad (a=2),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(x/2) + \frac{3}{4}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{5}{12}, \quad (a=1/2).$$