Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria

Analisi Matematica I – Prova scritta del 16-06-2025

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x-a)e^{-\frac{x+1}{ax}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**
$[a = 4, 2, 3, 1]$

Svolgimento. Il dominio della funzione è chiaramente l'insieme $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Calcolo dei limiti ed eventuali asintoti nei punti di frontiera del dominio. Per $\boxed{x \to \pm\infty}$, ricordando che $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)e^{-\frac{x+1}{ax}} = (x-a)e^{-1/a-1/(ax)} = e^{-1/a}(x-a)e^{-1/(ax)} \\ &= e^{-1/a}(x-a)\left(1 - \frac{1}{ax} + o(x^{-1})\right) = e^{-1/a}\left(x - a - \frac{1}{a} + o(1)\right) \ . \end{aligned}$$

Quindi la retta di equazione $\boxed{y = e^{-1/a}\left(x - a - a^{-1}\right)}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Per $\boxed{x \to 0^{\pm}}$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -ae^{\frac{-1}{0^+}} = -ae^{-\infty} = 0^- \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -ae^{\frac{-1}{0^-}} = -ae^{+\infty} = -\infty$$

Quindi c'è un asintoto verticale per $x \to 0^-$.

Derivabilità e calcolo della derivata. Chiaramente la funzione è continua e derivabile nel suo dominio, e si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{x+1}{ax}}\left(1 + \frac{1}{a}\frac{(x-a)}{x^2}\right) = \frac{e^{-\frac{x+1}{ax}}}{ax^2} \cdot (ax^2 + x - a)$$

per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre per $x \to 0^+$

$$f'(x) = -\frac{e^{-\frac{x+1}{ax}}}{ax^2}(1 + o(1)) = -\frac{e^{-\frac{1}{ax}}}{ax^2}(1 + o(1)) \to 0^-$$

per la gerarchia degli infinitesimi, in quanto $e^{-\frac{1}{ax}} \overset{x\to 0^+}{\to} 0^+$, mentre per $x \to 0^-$

$$f'(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{ax}}}{ax^2}(1 + o(1)) \to -\infty$$

in quanto $e^{-\frac{1}{ax}} \overset{x\to 0^-}{\to} +\infty$.

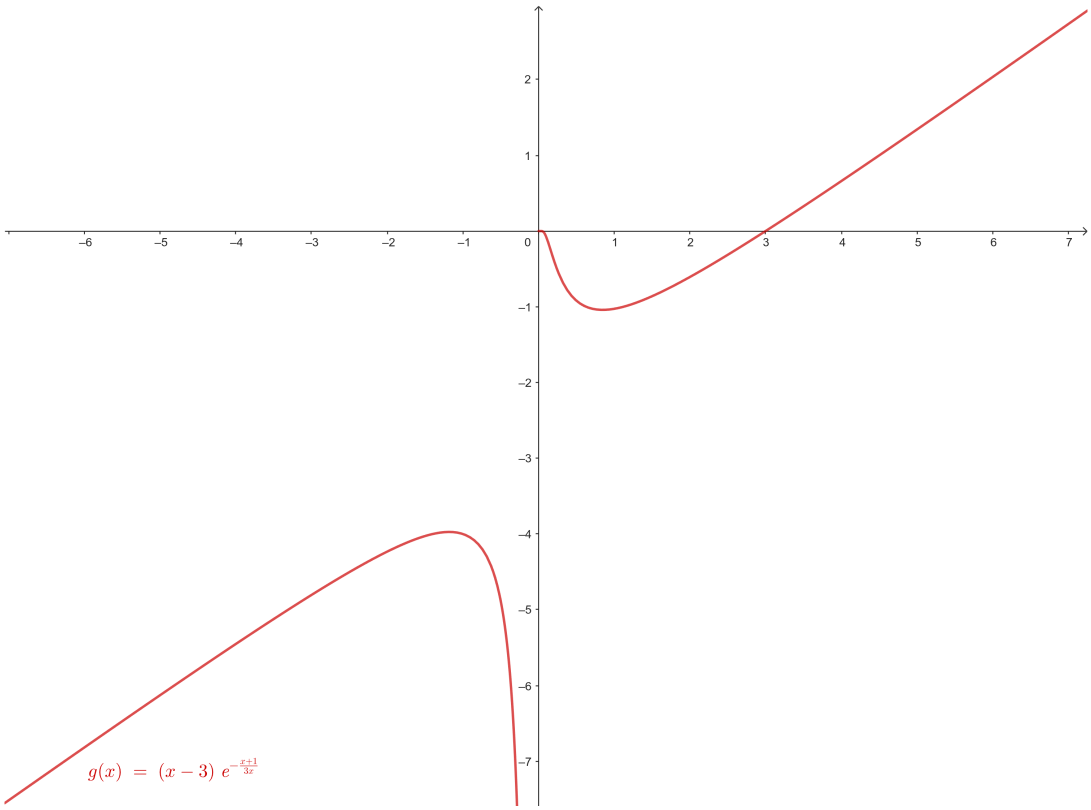
Studio della monotonia e dei punti estermali. Il segno della derivata prima coincide con quello del polinomio $ax^2 + x - a$ le cui radici sono

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2a}$$

che sosddisfano $x_- < 0 < x_+ < a$ (le prime due disuguaglianze sono ovvie, e la terza equivale a $1 + 4a^2 < (2a^2+1)^2 = 1 + 4a^2 + 4a^4$, evidentemente valida). Quindi per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ si ha

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{cccccc} + & 0 & - & - & 0 & + \\ (-\infty, x_-) & x_- & (x_-, 0) & (0, x_+) & x_+ & (x_+, +\infty) \end{array} \right.$$

Quindi x_-, x_+ sono rispettivamente un **massimo ed un minimo relativo**.
Il grafico della funzione per $a = 3$ è riportato in figura.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [5 punti] Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione.

$$f(x) = (x^2 + x(1-a) - a)^{1/3} \cdot \ln(1 + |x+1|)$$

$[a = 2, -2, 3, -3]$

Svolgimento. Continuità. Poiché la radice cubica è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $t \mapsto \log t$ è definita e continua per $t > 0$, $1 + |x+1| \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $t \mapsto |t|$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione data è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ (in quanto ottenuta tramite somme, prodotti e composizioni di funzioni continue).

Derivabilità. Poichè le funzioni $t \mapsto t^{1/3}$ e $t \mapsto |t|$ sono derivabili solo per $t \neq 0$, gli unici problemi si possono avere nei punti in cui si azzera l'argomento della radice cubica e del modulo. Dato che $x^2 + x(1-a) - a = (x-a)(x+1)$ gli zeri dell'argomento della radice cubica sono $x = a$ e $x = -1$ mentre l'argomento del modulo è 0 in $x = -1$. Nel resto dei punti del dominio la funzione è derivabile: per $x \neq a, -1$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x + (1-a))}{((x-a)(x+1))^{2/3}} \ln(1 + |x+1|) + ((x-a)(x+1))^{1/3} \cdot \frac{segno(x+1)}{1 + |x+1|}.$$

Per la derivabilità in $x = a$ e $x = -1$ si studia il limite del rapporto incrementale. Per $\boxed{x \to a}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{((x-a)(x+1))^{1/3} \cdot \ln(1 + |x+1|)}{x-a} \\ &= \frac{(x+1)^{1/3} \ln(1 + |x+1|)}{(x-a)^{2/3}} \to \frac{(a+1)^{1/3} \log(1 + |a+1|)}{0^+} = segno(a+1)\infty. \end{aligned}$$

Quindi la funzione non è derivabile in a (si tratta di un punto a tangente verticale). Per $\boxed{x \to -1}$, ricordando che $\log(1+t) = t + o(t) = t(1 + o(1))$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \frac{((x-a)(x+1))^{1/3} \cdot \ln(1 + |x+1|)}{x+1} \\ &= \frac{(x-a)^{1/3} \ln(1 + |x+1|)}{(x+1)^{2/3}} = (x-a)^{1/3} \frac{|x+1|}{(x+1)^{2/3}}(1 + o(1)) \\ &= (x-a)^{1/3}|x+1|^{1/3}(1 + o(1)) \to 0, \end{aligned}$$

quindi in $x = -1$ la funzione è derivabile con derivata $f'(-1) = 0$. Alternativamente, essendo f continua in $x = -1$ e $x = a$, si poteva calcolare il limite di f' in questi punti ed usare il corollario del teorema di Lagrange per decidere la derivabilità di f (ottenendo ovviamente lo stesso risultato).

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [6 punti] Data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = (x^2 + (a-1)x - a) \cdot \frac{2t}{1+a}$$

risolvere il problema di Cauchy $x(0) = b$ specificandone l'intervallo massimale di esistenza.
$[(a,b) = (3,2), (2,2), (3,3), (2,3)]$.

Svolgimento. Ricordiamo che con $\dot{x}$ si indica la derivata della funzione $t \mapsto x(t)$ rispetto a t. Si tratta di una equazione a variabili separabili:

$$\dot{x}(t) = h(x(t))\, g(t) \quad \text{dove} \quad h(x) = x^2 + (a-1)x - a = (x-1)(x+a) \quad , \quad g(t) = \frac{2t}{1+a}.$$

Si vede dunque che l'equazione ammette le due soluzioni stazionarie $x(t) = 1$ e $x(t) = -a$, $t \in \mathbb{R}$. Poiché allora la soluzione del probelma di Cauchy proposto soddisfa $x(0) = b > 1 > -a$, si avrà, dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy, $x(t) > 1$ per ogni t appartenente all'intervallo massimale di esistenza della soluzione. In particolare la soluzione cercata non è una di quelle stazionarie. Separando le variabili si ha allora

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+a)} = \frac{t^2}{1+a} + C \iff \frac{1}{1+a} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+a)} \right) = \frac{t^2}{1+a} + C \iff \ln \left| \frac{x-1}{x+a} \right| = t^2 + C,$$

e quindi, tenendo conto che $\frac{x-1}{x+a} > 0$ per $x > 1$, la soluzione cercata si ottiene da

$$\frac{x-1}{x+a} = \left| \frac{x-1}{x+a} \right| = Ke^{t^2} \iff x - 1 = Ke^{t^2}(x+a) \iff x(1 - Ke^{t^2}) = 1 + aKe^{t^2} \iff$$

$$x(t) = \frac{1 + aKe^{t^2}}{1 - Ke^{t^2}},$$

dove $K = e^C$. Siccome la condizione iniziale $x(0) = b$ implica $K = \frac{b-1}{b+a}$, la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{b + a + a(b-1)e^{t^2}}{b + a - (b-1)e^{t^2}}.$$

Per calcolare l'intervallo massimale di esistenza studiamo gli zeri del denominatore:

$$b + a = (b-1)e^{t^2} \iff \frac{b+a}{b-1} = e^{t^2} \iff t = \pm \ln^{1/2} \left(\frac{b+a}{b-1} \right).$$

Considerando il dato iniziale $t = 0$ l'intervallo massimale di esistenza è allora

$$I = \left(-\ln^{1/2} \left(\frac{b+a}{b-1} \right), \ln^{1/2} \left(\frac{b+a}{b-1} \right) \right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2/2} + \ln(1-x)\cdot\cos(ax) - \cos(x)}{x\cdot(1-ax^2)^{-1} - \sin(x) + e^{-1/x}}$$

$[a = 1, 2, 3, 4]$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per quanto riguarda il denominatore $d(x)$, in base agli sviluppi $(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t)$ e $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ per $t \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} x\cdot(1 - a\cdot x^2)^{-1} - \sin(x) &= x(1 + ax^2 + o(x^3)) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= \frac{(1+6a)x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Inoltre la funzione $e^{-1/x}$ per $x \to 0^+$ tende a zero più velocemente di ogni potenza, cioè $e^{-1/x} = o(x^\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$. Quindi in particolare $e^{-1/x} = o(x^3)$ e il denominatore ha lo sviluppo

$$d(x) = \frac{(1+6a)x^3}{6} + e^{-1/x} + o(x^3) = \frac{(1+6a)x^3}{6} + o(x^3).$$

Basta allora sviluppare il numeratore $n(x)$ a meno di termini $o(x^3)$. Dallo sviluppo $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ per $t \to 0$ si ha allora

$$\begin{aligned} e^{x-x^2/2} &= 1 + (x - x^2/2) + \frac{1}{2}(x - x^2/2)^2 + \frac{1}{6}(x - x^2/2)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

mentre dagli sviluppi $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ e $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$ per $t \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \ln(1-x)\cdot\cos(ax) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{a^2x^3}{2} + o(x^3) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{(3a^2-2)x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Quindi il numeratore diventa

$$n(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} + \frac{(3a^2-2)x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = \frac{(3a^2-4)x^3}{6} + o(x^3).$$

In conclusione il limite richiesto è

$$\frac{\frac{(3a^2-4)x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{(1+6a)x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{3a^2-4}{(1+6a)}(1 + o(1)) \overset{x\to 0^+}{\to} \frac{3a^2-4}{1+6a}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [6 punti] Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio

$$I = \int_0^\infty \frac{(2\sqrt{x}+a+1)\ln(\sqrt{x}+1)}{(x+(a+1)\sqrt{x}+a)^2 x^{1/2}}\,dx.$$

[$a = 5, 4, 3, 2$]

Svolgimento. Sostituendo $y = \sqrt{x}$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{2y+a+1}{(y^2+(a+1)y+a)^2 y}\ln(y+1)2y\,dy = 2\int_0^\infty \frac{2y+a+1}{(y^2+(a+1)y+a)^2}\ln(y+1)dy.$$

Inoltre osservando che $2y+a+1 = \frac{d}{dy}(y^2+(a+1)y+a)$ si vede che

$$\int \frac{2y+a+1}{(y^2+(a+1)y+a)^2}dy = -\frac{1}{y^2+(a+1)y+a} + c,$$

e dunque integrando per parti

$$\begin{aligned} 2\int \frac{2y+a+1}{(y^2+(a+1)y+a)^2}\ln(y+1)dy &= -\frac{2\ln(y+1)}{(y^2+(a+1)y+a)} + \int \frac{2}{(y^2+(a+1)y+a)(y+1)}\,dy \\ &= -\frac{2\ln(y+1)}{(y^2+(a+1)y+a)} + \int \frac{2}{(y+a)(y+1)^2}\,dy. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è razionale, e si calcola quindi usando la decomposizione in fratti semplici. Si ha

$$\frac{2}{(y+a)(y+1)^2} = \frac{A}{y+a} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{(y+1)^2}$$

e si trova che

$$A = \frac{2}{(1-a)^2} \quad , \quad C = \frac{2}{a-1} \quad , \quad B = -A = -\frac{2}{(1-a)^2}.$$

Quindi

$$\int \frac{2}{(y+a)(y+1)^2}\,dy = \frac{2}{(1-a)^2}\ln\left|\frac{y+a}{y+1}\right| - \frac{2}{a-1}\frac{1}{y+1} + C\ .$$

Una primitiva nella variabile y è pertanto la funzione

$$F(y) = -\frac{2\ln(y+1)}{(y^2+(a+1)y+a)} + \frac{2}{(1-a)^2}\ln\left|\frac{y+a}{y+1}\right| - \frac{2}{a-1}\frac{1}{y+1}$$

e l'integrale proposto risulta

$$I = \lim_{y\to\infty} F(y) - \lim_{y\to 0} F(y) = -\frac{2}{(1-a)^2}\ln(a) + \frac{2}{a-1}.$$