Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13 settembre 2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(|a - \log(x^2)|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Lo studio della derivata seconda non è necessario.
$[a = 1, 2, -1, -2]$

Svolgimento:
Il dominio di f è chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è pari, pertanto possiamo limitarci a studiarla per $x > 0$. Inoltre, a causa del modulo, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq 0$.
Ora, per $x > 0$ si ha

$$a - \log(x^2) = a - 2\log(x) \geq 0 \iff \log(x) \leq a/2 \iff x \leq \exp(a/2).$$

e pertanto

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(a - 2\log(x)) & \text{se } 0 < x \leq \exp(a/2), \\ \arctan(2\log(x) - a) & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

La funzione è continua nel suo dominio.
Inoltre abbiamo chiaramente che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

pertanto f ha come asintoto orizzontale destro e sinistro la retta di equazione $y = \pi/2$.
Poiché il modulo non è derivable nell'origine, la f è derivabile per ogni x nel dominio eccetto il caso $x = \pm\exp(a/2)$ che deve essere studiato a parte. La derivata vale:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x(1 + (a - 2\ln(x))^2)} & \text{se } 0 < x < \exp(a/2) \\ \dfrac{2}{x(1 + (a - 2\ln(x))^2)} & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

Si ha poi che $x = \pm\exp(a/2)$ sono punti angolosi poiché

$$\lim_{x\to\exp(a/2)^-} f'(x) = -2\exp(-a/2) \qquad \lim_{x\to\exp(a/2)^+} f'(x) = 2\exp(-a/2).$$

Inoltre, in base alla gerarchia di infiniti e infinitesimi,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

e dunque il punto $x = 0$, che non appartiene al dominio di f, sarebbe una cuspide se estendessimo ad esso la funzione per continuità.

Infine dallo studio del segno di f' si ha evidentemnte che f è decrescente in $(0, \exp(a/2))$ e crescente per $x > \exp(a/2)$, e pertanto il punto $x = \exp(a/2)$ è un punto di minimo (assoluto) dove la funzione vale 0, mentre $x = 0$ sarebbe un punto di massimo assoluto per la f estesa per continuità.

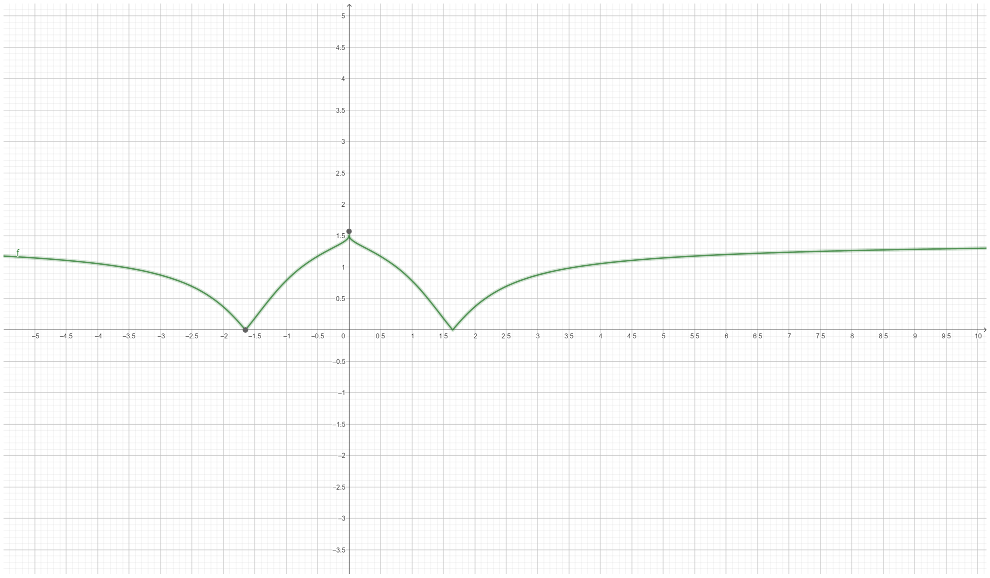

FIGURA 1. Grafico di f per $a = 2$

Esercizio 2. **[7 punti]** Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(1+\alpha^2 t^2)^2} dt \qquad \left[\int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(\alpha^{-2}+t^2)^2} dt\right].$$

$[\alpha = e^{1/2}, e, e^{-1}, e^{-1/2}]$

Svolgimento: Gli integrali del secondo tipo si riconducono a quelli del primo scrivendo

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(\alpha^{-2}+t^2)^2} dt = \alpha^4 \int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(1+\alpha^2 t^2)^2} dt.$$

Inoltre il coefficiente α si può supporre 1 tramite il cambio di variabile $y = \alpha t$ con $dy = \alpha dt$, per il quale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(1+\alpha^2 t^2)^2} dt = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy.$$

La funzione integranda è continua per ogni $y > 0$. L'integrale è improprio ai due estremi, e pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy.$$

Per determinare la primitiva della funzione integranda facciamo un' integrazione per parti con

(1) $$f'(y) = \frac{y}{(1+y^2)^2} \implies f(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}$$

e

(2) $$g(y) = \ln y \implies g'(y) = \frac{1}{y}.$$

Abbiamo

$$\int \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy = -\frac{1}{2}\frac{\ln y}{1+y^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{t(1+y^2)}.$$

Ora, la funzione razionale si decompone secondo la formula

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1},$$

e identificando abbiamo che $A = 1, B = -1, C = 0$, ovvero

$$\int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \ln y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c.$$

L'integrale richiesto è quindi

$$\frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \frac{1}{2\alpha^2}\left[-\frac{\ln y}{1+y^2} + \ln y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right]_a^b,$$

e consideriamo allora i limiti

$$\lim_{b\to+\infty} -\frac{\ln b}{1+b^2} + \ln\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) = 0$$

e

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\ln a}{1+a^2} - \ln a + \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = \lim_{a\to 0^+} \ln(a)\left(\frac{1}{1+a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = 0.$$

Concludiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(1+\frac{\ln t}{\ln \alpha})}{(1+\alpha^2 t^2)^2} dt = 0.$$

Metodo alternativo:
Un procedimento equivalente, alternativo all'integrazione per parti (1)–(2) è il seguente: Si sostituisce $x = y^2$ e si integra per parti, ovvero

$$\int \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{4} \frac{\ln x}{(1+x)} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x(1+x)} dx$$

Ora, la funzione razionale si decompone secondo la formula

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x}.$$

Per identificazione otteniamo $A = 1, B = -1$, ovvero, come sopra

$$\int \frac{dx}{x(1+x)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \ln x - \ln(1+x) + c.$$

Calcoliamo la primitiva così ottenuta in $0 < a < b$ e consideriamo i limiti

$$\lim_{b \to +\infty} -\frac{\ln b}{1+b} + \ln\left(\frac{b}{1+b} \right) = 0$$

e

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a}{1+a} - \ln(a) + \ln(1+a) = \lim_{a \to 0^+} \ln(a) \left(\frac{1}{1+a} - 1 \right) + \ln(1+a) = 0.$$

Concludiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy = 0.$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} y(t) + \sin(t), \\ y(a) &= 1, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = -\pi/3, -\pi/4, -\pi/6, -3\pi/4]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si tratta di un'equazione del I ordine lineare non omogenea definita per $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché allora la condizione iniziale è imposta in $t = a \in (-\pi, 0)$, la soluzione del problema di Cauchy considerato sarà definita nell'intervallo $(-\pi, 0)$. L'integrale generale è dato dalla formula

$$y(t) = e^{\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt} \left(c + \int e^{-\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt} \sin t \, dt \right).$$

Tenendo allora conto che $\sin t < 0$ per $t \in (-\pi, 0)$,

$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = \ln|\sin t| + k = \ln(-\sin t) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

e di conseguenza

$$\int e^{-\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt} \sin t \, dt = \int e^{-\ln(-\sin t)} \sin t \, dt = -\int dt = -t + h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = -\sin t(c - t) = \sin t(t - c), \qquad t \in (-\pi, 0)$$

e imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = a - \frac{1}{\sin a}$.
La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \left(t - a + \frac{1}{\sin(a)} \right) \sin(t),$$

e il suo intervallo di definizione è $(-\pi, 0)$.

Esercizio 4. [5 punti] Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

<u>*Svolgimento:*</u> Le versioni B, C, D si ottengono da questa sopra (A) sostituendo z con iz, $-iz$, $-z$ rispettivamente.
Poniamo $w = \frac{z+1}{z-1}$, che equivale a $z = \frac{w+1}{w-1}$ per $w \neq 1$. Le radici quarte dell'unità, soluzioni di $w^4 = 1$, sono

$$w_k = \exp(ik\frac{\pi}{2}) \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Ora per $k = 0$ abbiamo $w_0 = 1$ che va quindi scartata. Pertanto le soluzioni dell'equazione considerata sono

$$z_k = \frac{w_k + 1}{w_k - 1} = \frac{e^{i\theta_k} + 1}{e^{i\theta_k} - 1}, \qquad \text{per } k = 1, 2, 3,$$

dove $\theta_k = k\pi/2$, ovvero $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. Semplificando: $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -i$.

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + ax^2) - x \arctan(ax)}{x \arcsin^3(x)}$$

[a=2,3,4,5]

Svolgimento:
Cominciamo sviluppando il denominatore: abbiamo

$$\arcsin(x) = x + o(x) \implies x \arcsin^3(x) = x(x + o(x))^3 = x^4(1 + o(1)) = x^4 + o(x^4), \quad \text{per } x \to 0.$$

Basterà, pertanto, sviluppare il numeratore all' ordine 4. Dallo sviluppo $\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$, si ha

$$\log(1 + ax^2) = ax^2 - \frac{a^2 x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0,$$

e dallo sviluppo $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$ per $t \to 0$,

$$\arctan ax = ax - \frac{(ax)^3}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto il numeratore è

$$\log(1 + ax^2) - \arctan ax = -\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) x^4 + o(x^4),$$

e il limite richiesto è

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}.$$