Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 11/07/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{ax}(e^x - 1)^{1/3}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[a = \pm 1,\ b = \pm 1]$

Svolgimento:

Studiamo il caso $a = -1$, $b = 1$:

$$f(x) = e^{-x}(e^x - 1)^{1/3}.$$

Il dominio di f è chiaramente $D = \mathbb{R}$.

È anche facile studiare il segno di f: poiché $e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $e^x - 1 > 0$ se e solo se $x > 0$, si ha chiaramente $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Essendo poi $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, si ha chiaramente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x/3}(1 - e^{-x})^{1/3} = 0,$$

per cui la retta di equazione $y = 0$ (cioè l'asse x) è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ per il grafico di f. Non ci sono poi asintoti obliqui dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Per $x \neq 0$ si ha poi

$$f'(x) = -e^{-x}(e^x - 1)^{1/3} + \frac{1}{3}e^{-x}(e^x - 1)^{-2/3}e^x = \frac{e^{-x}\ (3 - 2\,e^x)}{3\,\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}}.$$

Inoltre possiamo calcolare facilmente $\lim_{x\to0^\pm} f'(x) = +\infty$, pertanto in $x = 0$ abbiamo un punto di non derivabilità con tangente verticale.

Per quanto riguarda lo studio della monotonia di f, essendo $e^{-x} > 0$ ed $(e^x - 1)^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si avrà

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \log\frac{3}{2},\ x \neq 0,$$

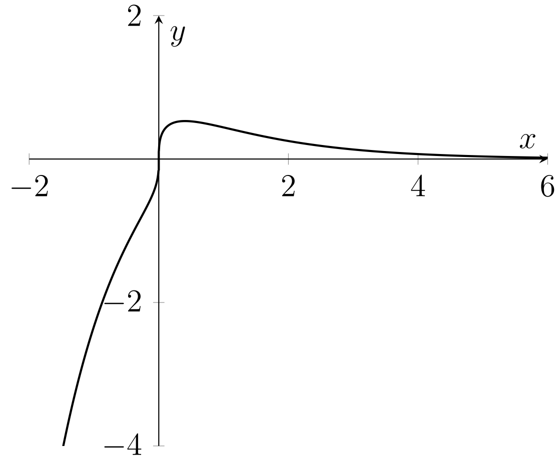
e dunque f è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, \log\frac{3}{2})$, mentre è monotona decrescente in $(\log\frac{3}{2}, +\infty)$, e di conseguenza vi è un massimo relativo ed assoluto nel punto $x_M = \log\frac{3}{2}$, con $f(x_M) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

Anche se non richiesto, lo studio della convessità di f non è difficile: per $x \neq 0$, si ha

$$f''(x) = \frac{4\,e^{2\,x} - 15\,e^{x} + 9}{9e^{x}\sqrt[3]{(e^{x}-1)^{2}}\;(e^{x}-1)},$$

e studiandone il segno vediamo che la funzione è concava in $(-\infty, \log(3/4)) \cup (0, \log 3)$ e convessa in $(\log(3/4), 0) \cup (\log 3, \infty)$. Pertanto il grafico di f ha un flesso, a tangente verticale, in $x = 0$ e altri due, a tangente obliqua, in $x = \log\frac{3}{4}$ e $x = \log 3$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = -1$, $b = 1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[7 punti]** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2a}} \frac{x \text{ arcsen} \sqrt{1-ax}}{\sqrt{1-ax}}\, dx.$$

$[a = \pm 2, \pm 3]$

Svolgimento: Indichiamo con I il valore dell'integrale proposto.
Operando la sostituzione $ax = t$, risulta

$$I = \frac{1}{a^2} \int_0^{1/2} \frac{t \,\text{arcsen} \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}}\, dt.$$

Poniamo adesso $\sqrt{1-t} = s$ e troviamo

$$(*) \qquad I = -\frac{2}{a^2} \int_1^{1/\sqrt{2}} (1-s^2) \,\text{arcsen}\, s\, ds = \frac{2}{a^2} \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-s^2) \,\text{arcsen}\, s\, ds.$$

Integrando poi per parti, e ricordando che $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$I = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[\left(s - \frac{s^3}{3} \right) \arcsin s \right]_{1/\sqrt{2}}^1 - \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{3s - s^3}{\sqrt{1-s^2}} ds \right\} = \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{24\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{3s - s^3}{\sqrt{1-s^2}} ds \right\},$$

e operando, nell'ultimo integrale, l'ulteriore sostituzione $u = 1 - s^2$ (da cui $s = \sqrt{1-u}$, $du = -2s\, ds$), si ottiene

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{3s - s^3}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{3 - s^2}{\sqrt{1-s^2}} s\, ds = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{2+u}{u^{1/2}} du = \int_0^{\frac{1}{2}} u^{-1/2} du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1/2} du$$
$$= \left[2u^{1/2} + \frac{1}{3} u^{3/2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{6\sqrt{2}}.$$

Pertanto l'integrale proposto vale

$$I = \frac{2}{a^2} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{24\sqrt{2}} - \frac{13}{18\sqrt{2}} \right].$$

In alternativa, possiamo sostituire $s = \text{sen}\, y$, ovvero $y = \arcsin s$, nella $(*)$, ottenendo

$$I = \frac{2}{a^2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} y\,(1 - \text{sen}^2\, y)\, \cos y\, dy.$$

Osservando poi che

$$\int (1 - \sin^2 y) \cos y dy = \sin y - \frac{1}{3} \sin^3 y + c,$$

possiamo integrare per parti per parti ed abbiamo

$$I = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[y\,(\text{sen}\, y - \tfrac{1}{3} \text{sen}^3\, y) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{sen}\, y - \tfrac{1}{3} \text{sen}^3\, y) dy \right\}.$$

Poiché

$$\int \text{sen}^3\, y\, dy = \int (1 - \cos^2 y)\, \text{sen}\, y\, dy = -\cos y + \tfrac{1}{3} \cos^3 y + c \qquad c \in \mathbb{R},$$

deduciamo

$$
\begin{aligned}
I &= \tfrac{2}{a^2}\left[y\left(\operatorname{sen} y - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 y\right) + \cos y + \tfrac{1}{3}\left(-\cos y + \tfrac{1}{3}\cos^3 y\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{2}{a^2}\left[\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{2}{a^2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{24\sqrt{2}} - \frac{13}{18\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}
$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2\,\bar{z}^{-1} + a\,\bar{z}\,z^{-1} = 0.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento:

L'equazione proposta è definita solo per $z \neq 0$. Pertanto è equivalente all'equazione:

$$(*) \qquad z^2\,\bar{z}^{-1}(\bar{z}\,z^{-1})^{-1} = -a \quad \text{ovvero} \quad z^3\bar{z}^{-2} = -a.$$

Utilizzando la rappresentazione di Eulero per z, $z = \rho e^{\theta i}$, si ha

$$\rho e^{5\theta i} = -a = a e^{-i\pi},$$

da cui $\rho = a$ e $5\theta = -\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, cioè $\theta = \theta_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{5}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono $z_k = a e^{\theta_k i}$, per $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Alternativamente, ma facendo molti più calcoli (e quindi rischiando di sbagliare molto di più), si può usare la rappresentazione cartesiana $z = x + iy$ nella $(*)$, ottenendo

$$\frac{(x+iy)^3}{(x-iy)^2} = \frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{x^2 - y^2 - 2ixy} = -a$$

che è equivalente, sotto la condizione $z \neq 0$, a

$$x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + ax^2 - ay^2 - 2iaxy = 0.$$

Separando allore le parti reali e immaginarie si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0, \\ (3x^2 - y^2 - 2ax)y = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione implica $y = 0$ o $y^2 = x(3x - 2a)$. Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione si ottiene $x^3 + ax^2 = x^2(x + a) = 0$, da cui $x = -a$ (la soluzione $x = 0$ va scartata perché $z = x + iy \neq 0$). Sostituendo invece $y^2 = x(3x - 2a)$ nella prima equazione si ricava

$$-2x(4x^2 - 2ax - a^2) = 0.$$

Scartando di nuovo la soluzione $x = 0$ (che implica $y = 0$ e dunque $z = 0$), si ottiene

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}a \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{8}a^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}}.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione proposta sono

$$z_{1,5} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right),\ z_3 = -a,\ z_{2,4} = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

È interessante osservare che confrontando queste soluzioni con quelle ottenute tramite la rappresentazione esponenziale si ottengono le relazioni notevoli

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge:

$$\int_a^{+\infty} \left(x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} \right)^\alpha dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Osserviamo che poiché la funzione integranda è ben definita e continua in tutto $[a, +\infty)$, la convergenza va verificata soltanto a $+\infty$. È poi chiaro che l'integrale considerato non converge per $\alpha = 0$ (è l'integrale della funzione costantemente uguale a 1). Inoltre, ricordando che $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$, possiamo scrivere

$$\left(x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} \right)^\alpha = \frac{1}{x^{\alpha/a}}(1 - \cos e^{-ax})^\alpha \sim \frac{e^{-2a\alpha x}}{2^\alpha x^{\alpha/a}} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico ci possiamo ricondurre a studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è integrabile all'infinito la funzione $\frac{e^{-2a\alpha x}}{x^{\alpha/a}}$. Se allora $\alpha > 0$, essendo $1/x^{\alpha/a} \to 0$ per $x \to +\infty$, si avrà

$$\frac{e^{-2a\alpha x}}{x^{\alpha/a}} = \frac{1}{x^{\alpha/a}} e^{-2a\alpha x} \leq e^{-2a\alpha x}$$

definitivamente per $x \to +\infty$, e dunque l'integrale dato è convergente per $\alpha > 0$. Se invece $\alpha < 0$ si ha, in base alla gerarchia degli infiniti, $\frac{e^{-2a\alpha x}}{x^{\alpha/a}} \to +\infty$, e quindi l'integrale diverge.
Possiamo quindi concludere che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > 0$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)}.$$

$[a = \pm 3, \pm 5]$

Svolgimento: Valutiamo in prima battuta l'andamento asintotico del denominatore e del numeratore, e poi ne valutiamo il rapporto.

Denominatore. Usando gli sviluppi $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ e $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Inoltre, osserviamo che per la gerarchia degli infiniti/infinitesimi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^p}{e^y}\ \operatorname{sen}\left(-\tfrac{1}{y}\right)^2 = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

quindi in particolare $e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 = o(x^2)$. Riassumendo:

$$\text{denominatore} = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Numeratore. In base a quanto appena visto, basta sviluppare il numeratore fino a $o(x^2)$. Sviluppando allora il logaritmo per $x \to 0$,

$$\log(1+ax) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

quindi tenendo conto che $\operatorname{sen} t = t + o(t^2)$, per $t \to 0$, si ha

$$\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2) + o([ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)]^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2).$$

Poiché poi

$$\cos ax = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^3) = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)$$

e

$$e^{ax} = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

otteniamo

$$\text{numeratore} = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} - (1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2}) + o(x^2) = -\tfrac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2).$$

Rapporto. Dalle stime precedenti abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{3}{2}\,(ax)^2}{\frac{x^2}{2}}\ \frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 3a^2.$$