

**Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria**  
**Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/1/2024 - I turno**

|                                     |
|-------------------------------------|
| <b>Cognome:</b><br>(in STAMPATELLO) |
| <b>Nome:</b><br>(in STAMPATELLO)    |
| <b>Matricola:</b>                   |
| <b>Titolare del corso:</b>          |
| <b>Prova orale:</b>                 |

| Esercizio     | Punteggio |
|---------------|-----------|
| 1             |           |
| 2             |           |
| 3             |           |
| 4             |           |
| 5             |           |
| <b>Totale</b> |           |

A/B/C/D

**Esercizio 1. [8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{b} + a - \arcsin |e^{-bx} - 1|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[  $(a, b) = (2, 3), (3, -2), (-2, 3), (2, -3).$  ]

Svolgimento. Consideriamo il caso  $b > 0$ ; i casi con  $b < 0$  si ottengono considerando  $f(-x)$  al posto di  $f(x)$ .

Poiché il dominio della funzione  $\arcsin$  è  $[-1, 1]$ , il dominio di  $f$  è  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |e^{-bx} - 1| \leq 1\}$  ( $|e^{-bx} - 1| \geq -1$  è vera per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ). Si ha

$$|e^{-bx} - 1| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq e^{-bx} - 1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq e^{-bx} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{b} \log 2,$$

e pertanto  $D = [-\frac{1}{b} \log 2, +\infty)$ .

Essendo  $f$  continua in  $D$ , ed essendo  $\mathcal{D}D \setminus D = \{+\infty\}$ , il grafico di  $f$  non ha asintoti verticali. In particolare  $f(-\frac{1}{b} \log 2) = -\frac{1}{b^2} \log 2 + a - \frac{\pi}{2}$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi non ci sono nemmeno asintoti orizzontali, mentre poiché  $\arcsin t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  per  $t \rightarrow 1^-$ , per  $x \rightarrow +\infty$  si avrà  $f(x) = \frac{x}{b} + a - \frac{\pi}{2} + o(1)$  e quindi la retta di equazione  $y = \frac{x}{b} + a - \frac{\pi}{2}$  è asintoto obliquo a  $+\infty$  del grafico di  $f$ .

Risulta poi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{b} + a - \arcsin(e^{-bx} - 1), & -\frac{1}{b} \log 2 \leq x \leq 0, \\ \frac{x}{b} + a - \arcsin(1 - e^{-bx}), & x > 0, \end{cases}$$

e pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{be^{-bx}}{\sqrt{1 - (e^{-bx} - 1)^2}}, & -\frac{1}{b} \log 2 < x < 0, \\ \frac{1}{b} - \frac{be^{-bx}}{\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Inoltre si ha chiaramente

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{b} + b, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{b} - b, \quad f'_+(-\frac{1}{b} \log 2) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{b} \log 2)^+} f'(x) = +\infty,$$

e pertanto  $x = 0$  è un punto angoloso, e  $x = -\frac{1}{b} \log 2$  è un punto a tangente verticale per il grafico di  $f$ . In particolare dunque  $f$  non è derivabile in questi punti.

Per lo studio della monotonia, se  $-\frac{1}{b} \log 2 < x < 0$  si ha chiaramente  $f'(x) > 0$  in quanto somma di termini positivi, e dunque  $f$  è crescente in questo intervallo, mentre per  $x > 0$  il segno di  $f'(x)$  coincide con quello di  $\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2} - b^2 e^{-bx}$ . Essendo allora

$$\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2} - b^2 e^{-bx} = \sqrt{2e^{-bx} + e^{-2bx}} - b^2 e^{-bx} > 0$$

equivalente a

$$(b^4 + 1)e^{-2bx} - 2e^{-bx} = e^{-bx}((b^4 + 1)e^{-bx} - 2) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-bx} < \frac{2}{b^4 + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{1}{b} \log \left( \frac{b^4 + 1}{2} \right)$$

(si osservi che essendo  $b^4 + 1 > 2$  si ha  $\frac{1}{b} \log \left( \frac{b^4 + 1}{2} \right) > 0$ ), si deduce che  $f$  è decrescente in  $(0, \frac{1}{b} \log \left( \frac{b^4 + 1}{2} \right))$ , ed è crescente in  $(\frac{1}{b} \log \left( \frac{b^4 + 1}{2} \right), +\infty)$ . Quindi, in particolare,  $x = 0$  è un punto di massimo relativo e  $x = \frac{1}{b} \log \left( \frac{b^4 + 1}{2} \right)$  è un punto di minimo relativo per il grafico di  $f$ .

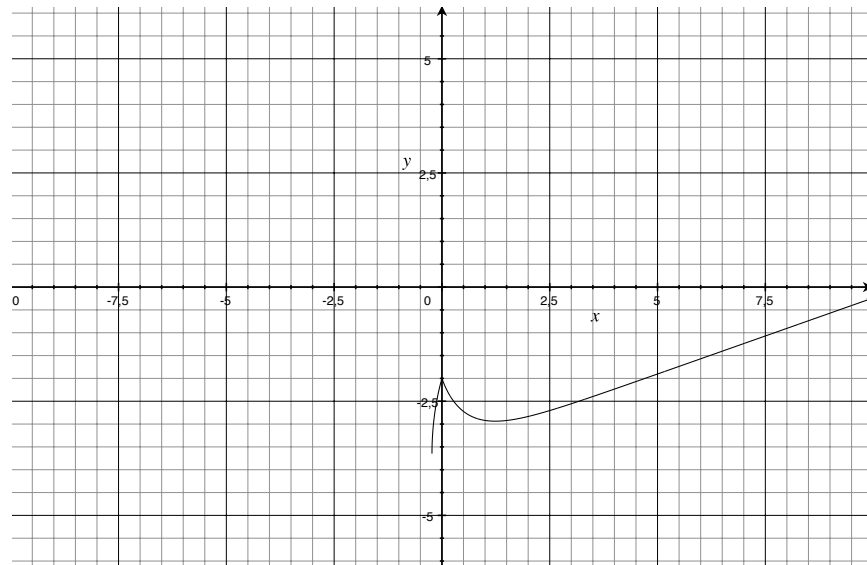


FIGURA 1. Grafico per  $a = -2, b = 3$

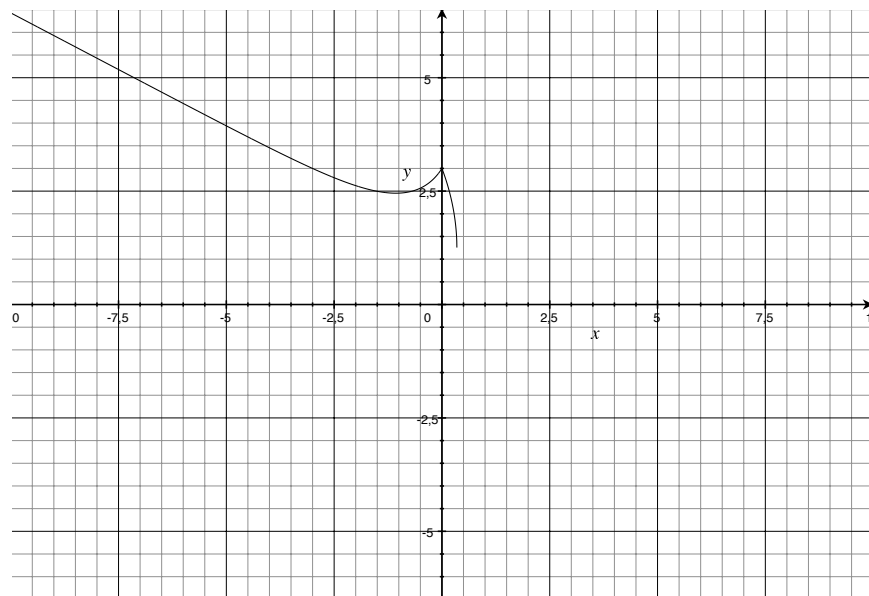


FIGURA 2. Grafico per  $a = 3, b = -2$

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

**Esercizio 2. [5 punti]** Determinare l'insieme dei punti  $z \in \mathbb{C}$  tale che:

$$|z + ia| = |z - b|$$

e disegnarlo sul piano complesso:

$$[(a, b) = (2, 3), (3, 2), (4, 2), (2, 4)]$$

Svolgimento. Sia  $z = x + iy$ , la condizione:

$$|z + ia| = |z - b|$$

equivale a

$$\sqrt{x^2 + (y + a)^2} = \sqrt{(x - b)^2 + y^2} \iff x^2 + y^2 + 2ay + a^2 = x^2 + b^2 - 2bx + y^2 \iff 2ay + 2bx = b^2 - a^2,$$

quindi i punti  $z \in \mathbb{C}$  che verificano la condizione  $|z + ia| = |z - b|$  sono tutti e solo quelli che verificano

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{b^2 - a^2}{2a},$$

che è l'equazione di una retta del piano complesso.

**Esercizio 3. [7 punti]** Mettere in ordine di infinitesimo crescente per  $x \rightarrow 0^+$  le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{(\arctan(ax))^2 - a^2x^2 + e^{x^c} - 1}{2x^{\frac{1}{b}} + 3x^{\frac{1}{b-1}} + e^{-\frac{c}{x}}}$$

$$g(x) = x^3 \left( 1 - \frac{\cos(cx)}{\sqrt{1 + (cx)^{\frac{1}{c}}}} \right)$$

$$h(x) = x^{4-\frac{1}{b}} \log(x^a + e^{\frac{x-c}{x}})$$

$$[(a, b, c) = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 5), (2, \frac{5}{4}, 6), (3, \frac{3}{2}, 7), (4, 2, 8)]$$

Svolgimento. Consideriamo  $f$ . Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha:  $\arctan ax = ax - \frac{1}{3}a^3x^3 + o(x^4)$ , ed essendo  $c > 4$ ,  $e^{x^c} = 1 + o(x^4)$ ; inoltre poiché  $\frac{1}{b-1} > \frac{1}{b}$  si ha  $x^{\frac{1}{b-1}} = o(x^{\frac{1}{b}})$  e  $e^{-\frac{c}{x}} = o(x^{\frac{1}{b}})$ , quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\arctan(ax))^2 - a^2x^2 + e^{x^c} - 1}{2x^{\frac{1}{b}} + 3x^{\frac{1}{b-1}} + e^{-\frac{c}{x}}} = \frac{(ax - \frac{a^3x^3}{3} + o(x^4))^2 - a^2x^2 + o(x^4)}{2x^{\frac{1}{b}}(1 + o(1))} \\ &= \frac{a^2x^2 - \frac{2a^4x^4}{3} + o(x^4) - a^2x^2 + o(x^4)}{2x^{\frac{1}{b}}(1 + o(1))} = -\frac{1}{3}a^4x^{4-\frac{1}{b}}(1 + o(1)) \sim -\frac{1}{3}a^4x^{4-\frac{1}{b}}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $g$ , essendo, per  $x \rightarrow 0$ ,  $\cos(cx) = 1 - \frac{1}{2}c^2x^2 + o(x^3)$ ,  $(1 + (cx)^{\frac{1}{c}})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(cx)^{\frac{1}{c}} + o(x^{\frac{1}{c}})$ , e tenendo conto che in tutti i casi  $\frac{1}{c} < 2$ , e dunque  $x^2 = o(x^{\frac{1}{c}})$ , si ha

$$g(x) = x^3 \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2}c^2x^2 + o(x^3) \right) \left( 1 - \frac{1}{2}(cx)^{\frac{1}{c}} + o(x^{\frac{1}{c}}) \right) \right) = x^3 \left( 1 - 1 + \frac{1}{2}(cx)^{\frac{1}{c}} + o(x^{\frac{1}{c}}) \right) \sim x^{3+\frac{1}{c}},$$

ed essendo in tutti i casi  $3 + \frac{1}{c} < 4 - \frac{1}{b}$ , risulta  $f(x) = o(g(x))$ .

Per lo studio di  $h(x)$ , essendo  $e^{\frac{x-c}{x}} = e \cdot e^{-\frac{c}{x}} = o(x^a)$  per  $x \rightarrow 0^+$ , si ha

$$h(x) = x^{4-\frac{1}{b}} \log(x^a + o(x^a)) = x^{4-\frac{1}{b}} [\log(x^a) + \log(1 + o(1))] \sim ax^{4-\frac{1}{b}} \log x,$$

e pertanto  $h(x) = o(g(x))$  e  $f(x) = o(h(x))$ .

Quindi l'ordine crescente è:  $g, h, f$ .

**Esercizio 4. [7 punti]**

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro  $\alpha \geq 0$  e calcolarlo, se esiste finito, per  $\alpha = 0$ :

$$\int_b^{+\infty} \frac{(\log x - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^\alpha \sqrt{e^{cx} - e^{cb}}} dx.$$

$$[(b, c) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)]$$

Svolgimento. La funzione integranda

$$f(x) = \frac{(\log x - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^\alpha \sqrt{e^{cx} - e^{cb}}}$$

è continua e positiva nell'intervallo di integrazione, ed è illimitata per  $x \rightarrow b^+$ , pertanto va studiata l'integrabilità di  $f$  sia nell'intorno destro di  $b$  che per  $x \rightarrow +\infty$ . Per  $x \rightarrow b^+$ , usando le equivalenze asintotiche  $\log(1+t) \sim t$  e  $e^t - 1 \sim t$  per  $t \rightarrow 0$ , si ha

$$f(x) = \frac{(\log \frac{x}{b})^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^\alpha \sqrt{e^{cb}(e^{c(x-b)} - 1)}} = \frac{[\log(1 + (\frac{x}{b} - 1))]^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^\alpha e^{\frac{cb}{2}}(e^{c(x-b)} - 1)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{c^{\frac{1}{2}} b^{\frac{\alpha}{3b}} e^{\frac{cb}{2}}} \cdot \frac{1}{(x-b)^{(1-\frac{1}{3b})\alpha + \frac{1}{2}}},$$

e quindi, in base al criterio del confronto asintotico,  $f$  è integrabile per  $x \rightarrow b^+$  se e solo se  $(1-\frac{1}{3b})\alpha + \frac{1}{2} < 1$ , cioè  $\alpha < \frac{3b}{2(3b-1)}$ . Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha invece

$$f(x) \sim \frac{(\log x)^{\frac{\alpha}{3b}}}{x^\alpha e^{\frac{cx}{2}}} < \frac{C}{x^2} \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow +\infty,$$

e quindi, per il criterio del confronto, il secondo integrale converge per ogni  $\alpha \geq 0$ . In definitiva si ha convergenza dell'integrale se e solo se  $\alpha < \frac{3b}{2(3b-1)}$ .

Calcoliamo l'integrale per  $\alpha = 0$  cioè

$$I := \int_b^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{cx} - e^{cb}}} dx.$$

Con la sostituzione  $y = \sqrt{e^{cx} - e^{cb}}$ , cioè  $x = \frac{1}{c} \log(y^2 + e^{cb})$  si ha  $dx = \frac{2y}{c(y^2 + e^{cb})} dy$ . Quindi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{c(y^2 + e^{cb})} dy = \frac{2}{ce^{cb}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{e^{\frac{cb}{2}}}\right)^2} = \frac{2}{ce^{\frac{cb}{2}}} \arctan\left(\frac{y}{e^{\frac{cb}{2}}}\right)_0^{+\infty} = \frac{\pi}{c\sqrt{e^{cb}}}.$$

**Esercizio 5. [5 punti]** Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{b+2}x\sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}},$$

a) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P = (b+2, f(b+2))$ ;b) calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$ .

$$[b = 2, 4, 6, 8]$$

Svolgimento. a) La retta tangente richiesta ha equazione

$$y = f(b+2) + f'(b+2)(x - (b+2)).$$

Si ha allora  $f(b+2) = 2\sqrt{b+2}(b+2)\sqrt{\frac{2}{2(b+2)}} = 2(b+2)$ . Inoltre  $f$  è derivabile in  $x = b+2$  e poiché risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{b+2} \left( \sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}} + x \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}}} \frac{2b+2}{(x+b+2)^2} \right) \\ &= 2\sqrt{b+2} \left( \sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}} + \frac{(b+1)x}{(x+b+2)^2} \sqrt{\frac{x+b+2}{x-b}} \right) \end{aligned}$$

si ha

$$f'(b+2) = \frac{b+5}{2}.$$

Dunque l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  in  $P$  è

$$y = 2(b+2) + \frac{b+5}{2}(x - b - 2).$$

b) Per calcolare il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2\sqrt{b+2}x$ , forma indeterminata del tipo  $+\infty - \infty$ , osserviamo che per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\begin{aligned} f(x) - 2\sqrt{b+2}x &= 2\sqrt{b+2}x \left( \sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}} - 1 \right) = 2\sqrt{b+2}x \left( \sqrt{1 - \frac{2b+2}{x+b+2}} - 1 \right) \\ &\sim -2\sqrt{b+2}x \frac{1}{2} \frac{2b+2}{x+b+2} \end{aligned}$$

e l'ultima espressione converge a  $-2\sqrt{b+2}(b+1)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .