

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/01/2024 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo locali e globali, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso. **È richiesto lo studio della derivata seconda.**

$$[(a, b) = (1, 1), (1, -1), (2, 1), (2, -1)]$$

Svolgimento. In tutti i casi $a > 0$. La funzione corrispondente ai parametri $(a, -1)$ si ottiene moltiplicando per -1 quella corrispondente ai parametri $(a, 1)$ e quindi il grafico della prima si ottiene da quello della seconda tramite una riflessione rispetto all'asse x . Consideriamo quindi solo il caso $(a, 1)$, ossia $f(x) = e^{-|1-(\frac{x}{a})^2|}$.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ e la funzione è continua.

È evidente che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare il grafico di f non interseca l'asse x . Si ha inoltre $f(0) = e^{-1}$. Inoltre f è una funzione pari.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

e quindi l'asse x è un asintoto orizzontale sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$. Essendo il dominio di f uguale $\mathbb{R}$ e la funzione continua non possono esserci asintoti verticali.

La funzione è derivabile infinite volte in

$$\mathbb{R} \setminus \{-a, a\} = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, +\infty).$$

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = 2 \frac{1 - (\frac{x}{a})^2}{|1 - (\frac{x}{a})^2|} \frac{x}{a^2} e^{-|1-(\frac{x}{a})^2|} = \begin{cases} -\frac{2}{a^2} x e^{-1+(\frac{x}{a})^2} & \text{se } x < -a \text{ o } x > a, \\ \frac{2}{a^2} x e^{1-(\frac{x}{a})^2} & \text{se } -a < x < a. \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = -\frac{2}{a} < 0$$

e

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \frac{2}{a} > 0.$$

Quindi f non è derivabile in $x = a$ che è un punto angoloso. Per parità di f lo stesso accade in $x = -a$.

Si ha

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Inoltre per $x < -a$ o $x > a$ si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

mentre per $-a < x < a$ si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Di conseguenza f è *strettamente crescente* in $(-\infty, -a]$ e in $[0, a]$ mentre f è *strettamente decrescente* in $[-a, 0]$ e in $[a, +\infty)$. $x = 0$ è un punto di *minimo locale* e $f(0) = e^{-1}$ è il corrispondente valore. I punti $x = -a$ e $x = a$ sono punti di massimo assoluto e il corrispondente valore massimo è $f(a) = f(-a) = 1$. La derivata seconda di f è data da

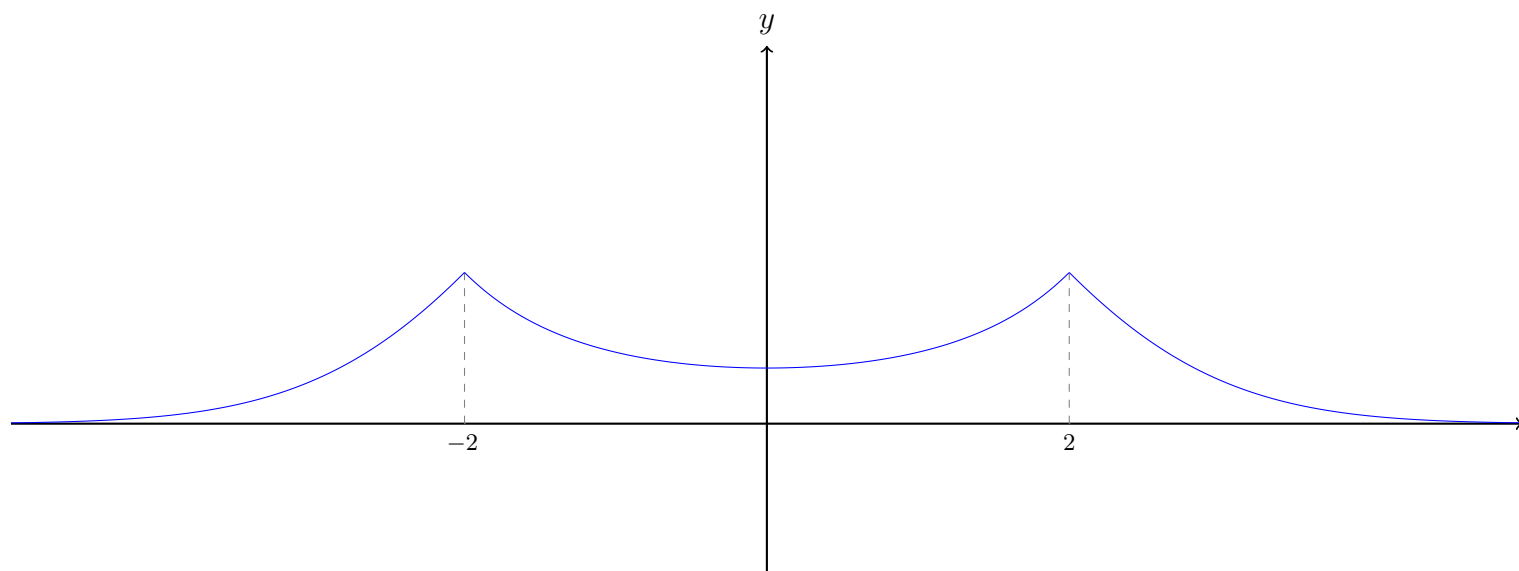
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \left(\frac{2x^2}{a^2} - 1 \right) e^{-1+(\frac{x}{a})^2} & \text{se } x < -a \text{ o } x > a, \\ \frac{2}{a^2} \left(\frac{2x^2}{a^2} + 1 \right) e^{1-(\frac{x}{a})^2} & \text{se } -a < x < a. \end{cases}$$

Essendo allora per $x < -a$ o $x > a$,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{a^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ o } x > \frac{a}{\sqrt{2}},$$

mentre chiaramente $f''(x) > 0$ per $-a < x < a$, e tenendo conto che $\frac{a}{\sqrt{2}} < a$, si vede che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ e quindi f è *strettamente convessa* in $(-\infty, -a]$ in $[-a, a]$ e in $[a, +\infty)$ e non ci sono punti di flesso. Si noti che f non può essere convessa in nessun intorno di uno dei due punti di massimo $x = a$ e $x = -a$.

Riportiamo qui sotto il grafico di f nel caso $(a, b) = (2, 1)$.



Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax} + e^{ax} + 1}{e^{ax} + 1} dx.$$

$$[(a, b) = (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)]$$

Svolgimento. Utilizzando la sostituzione $t = e^{ax}$, da cui $dt = ae^{ax} dx = at dx$, si trova

$$\int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax} + e^{ax} + 1}{e^{ax} + 1} dx = \frac{1}{a} \int_1^b \frac{t^2 + t + 1}{t(t+1)} dt.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + t + 1}{t(t+1)} dt &= \int 1 dt + \int \frac{1}{t(t+1)} dt \\ &= t + \int \frac{1}{t(t+1)} dt, \end{aligned}$$

ed utilizzando la decomposizioni in fratti semplici

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)},$$

si trova $A = 1$ e $B = -1$. Quindi

$$\int \frac{1}{t(t+1)} dt = \log |t| - \log |t+1| + C = \log \left| \frac{t}{t+1} \right| + C.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\log(b)}{a}} \frac{e^{2ax} + e^{ax} + 1}{e^{ax} + 1} dx &= \frac{1}{a} \left[t + \log \left| \frac{t}{t+1} \right| \right]_{t=1}^{t=b} \\ &= \frac{b-1}{a} + \frac{1}{a} \log \left(\frac{2b}{b+1} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 3. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = b \sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$[(a, b) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)]$$

Svolgimento. In tutti i casi $a > 0$ e $b \neq 0$. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione omogenea associata è $y'' + a^2 y = 0$ e la sua equazione caratteristica è $\lambda^2 + a^2 = 0$ che ha due soluzioni immaginarie $\lambda = \pm ai$. Di conseguenza l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea utilizzando il metodo di somiglianza. Avendosi

$$b \sin(ax) = e^{\gamma x} (P_1(x) \cos(\delta x) + P_2(x) \sin(\delta x))$$

per $\gamma = 0$, $\delta = a$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = b$, ed essendo $\gamma + i\delta = ia$ radice semplice del polinomio caratteristico, la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = x(A \cos(ax) + B \sin(ax))$. Eseguendo le derivate e sostituendole nell'equazione differenziale si trova

$$y_p'' + a^2 y_p = -2aA \sin(ax) + 2aB \cos(ax) = b \sin(ax)$$

che è verificata per $A = -\frac{b}{2a}$ e $B = 0$. L'integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) - \frac{b}{2a} x \cos(ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova poi

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0, \\ y'(0) = aC_1 - \frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \left(\frac{b}{2a^2} - \frac{1}{2a} \right) \sin(ax) - \frac{b}{2a} x \cos(ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il seguente limite di successione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \left(\sin\left(\frac{a}{n}\right) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{a^2 - b^2}{n^2 \log(n+2)} \right)^3}{\binom{n}{3} a^n + n! \log\left(1 + \frac{1}{n^6}\right)}$$

$$[(a, b) = (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \sqrt{5}), (1, \sqrt{2})]$$

Svolgimento. Si ha

$$\binom{n}{3} a^n = \frac{n!}{3!(n-3)!} a^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^n \sim \frac{n^3}{6} a^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e di conseguenza, per ogni intero positivo k ,

$$\frac{1}{n!} \binom{n}{3} a^n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi, utilizzando lo sviluppo $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$,

$$\binom{n}{3} a^n + n! \log\left(1 + \frac{1}{n^6}\right) = n! \left(\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \right).$$

Il limite richiesto diventa allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{a}{n}\right) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{a^2 - b^2}{n^2 \log(n+2)} \right)^3}{\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)},$$

e dunque al numeratore, grazie alla presenza della terza potenza, basta sviluppare l'espressione in parentesi tonde a meno di termini $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$. Notiamo allora che

$$\frac{a^2 - b^2}{n^2 \log(n+2)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e d'altra parte, in base agli sviluppi $\sin t = t + o(t^2)$, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{a}{n}\right) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos\left(\frac{b}{n}\right) &= \frac{a}{n} + 1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} - 1 + \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left(\sin\left(\frac{a}{n}\right) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{a^2 - b^2}{n^2 \log(n+2)} \right)^3 &= \left(\frac{a^2 + b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^3 \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^3}{8n^6} (1 + o(1))^3 = \frac{(a^2 + b^2)^3}{8n^6} (1 + o(1)) = \frac{(a^2 + b^2)^3}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right). \end{aligned}$$

In conclusione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \left(\sin\left(\frac{a}{n}\right) + e^{-\frac{a}{n}} - \cos\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{a^2 - b^2}{n^2 \log(n+2)} \right)^3}{\binom{n}{3} a^n + n! \log\left(1 + \frac{1}{n^6}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(a^2 + b^2)^3}{8n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)} = \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^3.$$

Esercizio 5. [5 punti] Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$(z^2 + ia^2)(z + iz + ia) = 0.$$

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento. Le soluzioni dell'equazione si ottengono unendo le soluzioni di $z^2 + ia^2 = 0$ con quelle di $z + iz + ia = 0$. La prima equazione è di secondo grado, e le sue soluzioni sono le radici quadrate di $-ia^2 = a^2 e^{i\frac{3}{2}\pi}$, che si ottengono dalla formula di De Moivre:

$$z_k = ae^{i\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)} = ae^{i(\frac{3}{4}\pi + k\pi)}, \quad k = 0, 1.$$

Si trovano quindi due soluzioni $z_0 = ae^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{a}{\sqrt{2}} + i\frac{a}{\sqrt{2}}$ e $z_1 = ae^{i\frac{7}{4}\pi} = -z_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} - i\frac{a}{\sqrt{2}}$. La seconda è l'equazione di primo grado $(1+i)z + ia = 0$ e ha come unica soluzione $z = -\frac{ia}{1+i} = -\frac{ia(1-i)}{2} = -\frac{a}{2} - i\frac{a}{2}$.