Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2024 - I Turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(|x-a| + |x-b| + 4\right) e^{-1/x} \qquad \left(f(x) = \tfrac{1}{2}\left(|x+a| + |x+b| + 4\right) e^{1/x}\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[(a,b) = (3,5), (9,11)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Consideriamo il caso che $f(x) = \frac{1}{2}\left(|x-a| + |x-b| + 4\right) e^{-1/x}$. Nell'altro caso basta scambiare x e $-x$.
Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e chiaramente $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$ (il valore assoluto è non negativo e l'esponenziale è positivo).
Si ha poi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a-x+b-x+4)e^{-1/x} = \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right) e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0, \\ \frac{1}{2}(x-a+b-x+4)e^{-1/x} = \left(\frac{b-a}{2} + 2\right) e^{-1/x} & \text{se } a \le x \le b, \\ \frac{1}{2}(x-a+x-b+4)e^{-1/x} = \left(x - \frac{a+b}{2} + 2\right) e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

Perciò, tenendo conto che $-1/x \to \pm\infty$ per $x \to 0^{\pm}$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

e pertanto la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro per il grafico di f, e non ci sono asintoti orizzontali. Poiché, inoltre, dallo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$ segue

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right)\left(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})\right) = -x + \frac{a+b}{2} + 3 + o(1) & \text{per } x \to -\infty, \\ \left(x - \frac{a+b}{2} + 2)\right)\left(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})\right) = x - \frac{a+b}{2} + 1 + o(1) & \text{per } x \to +\infty, \end{cases}$$

il grafico di f ha gli asintoti obliqui $y = -x + \frac{a+b}{2} + 3$ per $x \to -\infty$ e $y = x - \frac{a+b}{2} + 1$ per $x \to +\infty$.
Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, a, b\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{a+b}{2} + 2 - x}{x^2} - 1\right) e^{-1/x} = \frac{-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0, \\ \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } a < x < b, \\ \left(\frac{x - \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} + 1\right) e^{-1/x} = \frac{x^2 + x - \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

In particolare $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono punti angolosi del grafico:

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^-} \frac{-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} = \frac{-a^2 + \frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a} < 0 <$$
$$< f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} = \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a},$$

e

$$f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x) = \lim_{x\to b^-} \frac{\frac{b-a}{2}+2}{x^2} e^{-1/x} = \frac{\frac{b-a}{2}+2}{b^2} e^{-1/b} <$$

$$< f_+(b) = \lim_{x\to b^+} f'(x) = \lim_{x\to b^+} \frac{x^2+x-\frac{a+b}{2}+2}{x^2} e^{-1/x} = \frac{b^2+\frac{b-a}{2}+2}{b^2} e^{-1/b}.$$

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

Per quanto riguarda lo studio della monotonia, per $a < x < b$ si ha chiaramente $f'(x) > 0$, e dunque f è crescente in questo intervallo. Per $x > b$ il segno di $f'(x)$ è il segno del polinomio quadratico $x^2 + x - \frac{a+b}{2} + 2$, che è positivo se e solo se

$$x < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2(a+b)-7} \quad \text{o} \quad x > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2(a+b)-7},$$

e poiché in tutti e due i casi $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2(a+b)-7} < b$, si ha che $f'(x) > 0$, cioè f è crescente, per $x > b$. Infine per $x < a$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2$, che è positivo se e solo se

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{9+2(a+b)} =: x_1 < x < x_2 := -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{9+2(a+b)},$$

e in tutti i casi $x_1 < 0 < x_2 < a$. Riassumendo, si trova che

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = x_1 \text{ oppure } x_2, \\ < 0 & \text{se } x < x_1 \text{ oppure } x_2 < x < a, \\ > 0 & \text{se } x_1 < x < x_2 \ (x \neq 0) \text{ oppure } x > a \ (x \neq b), \end{cases}$$

e dunque f è strettamente decrescente in $(-\infty, x_1]$, strettamente crescente in $[-x_1, 0)$ e in $(0, x_2]$, di nuovo strettamente decrescente in $[x_2, a]$, e infine strettamente crescente in $[a, +\infty)$. Essendo continua in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, f ha minimi locali in $x = x_1$ e $x = a$ e un massimo locale in $x = x_2$. f non ha estremi assoluti ($\sup f = +\infty$, $\inf f = 0$).

Riassumendo, abbiamo nella versione

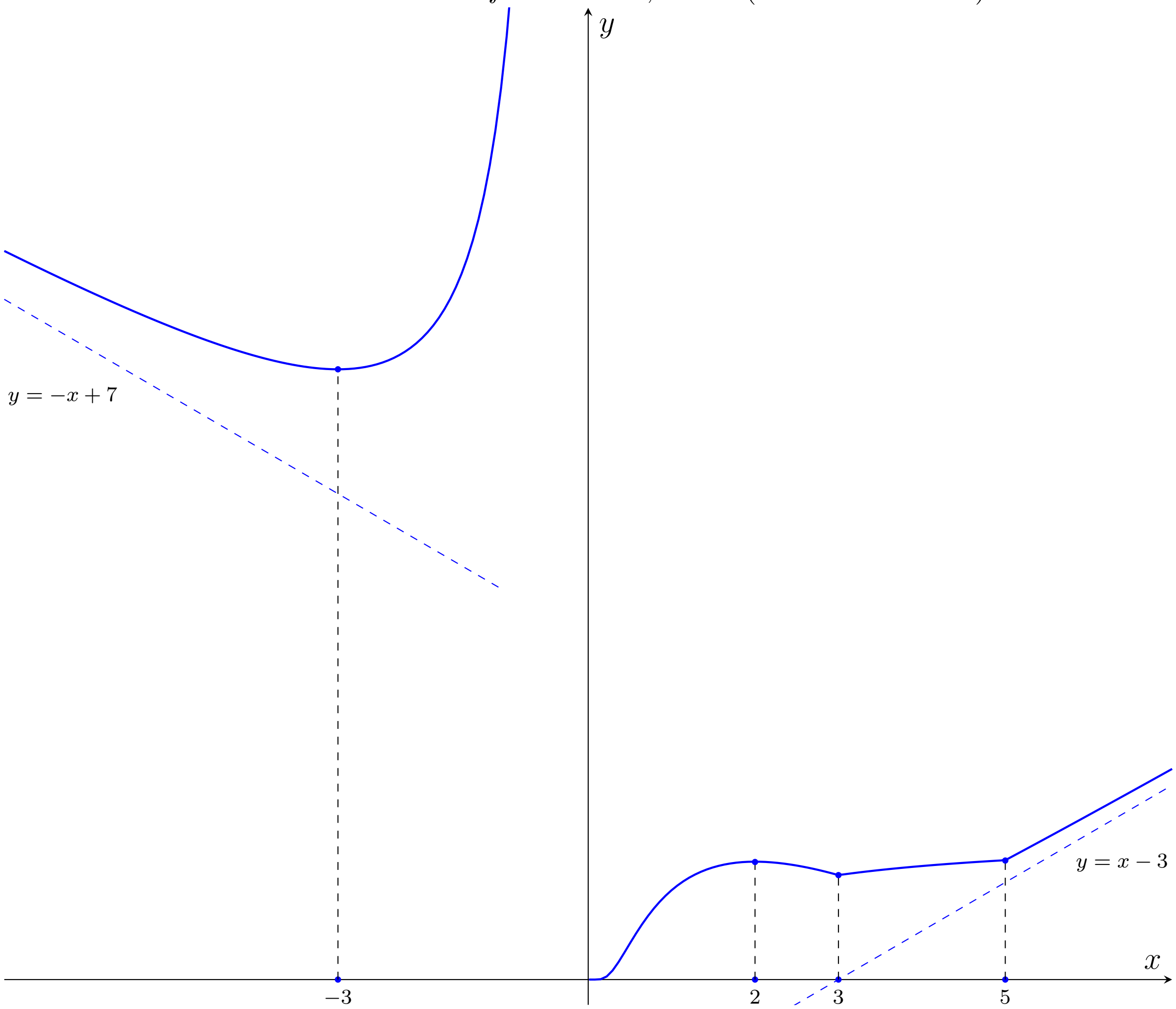
A: f ha AO $y = 7 - x$ ($y = x - 3$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = 2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^-$; $x = 3$ e $x = 5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$;

B: f ha AO $y = -3 - x$ ($y = x + 7$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = -2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^+$; $x = -3$ e $x = -5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^-$;

C: f ha AO $y = 13 - x$ ($y = x - 9$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = -4$ e $x = 9$ punti di minimo; $x = 3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^-$; $x = 9$ e $x = 11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$;

D: f ha AO $y = -9 - x$ ($y = x - 13$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = 4$ e $x = -9$ punti di minimo; $x = -3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^+$; $x = -9$ e $x = -11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^-$.

Figura 1. Grafico di f con $a = 3$, $b = 5$ (assi non in scala).



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [7 punti] Mettere le seguenti tre funzioni in ordine crescente di infinitesimo per $x \to -a$:

$$f(x) = b(x+a)^2 + e^{-1/(x+a)^2}$$
$$g(x) = \log(x+a+1) + 1 - \sin(x+a) - \cos(x+a)$$
$$h(x) = (x+a)^3 \log(|x+a|).$$

$[(a,b) = (4,1), (3,-2), (1,-3), (2,5)]$

Svolgimento: Per $x \to -a$ si ha $y = x + a \to 0$, e di conseguenza

$$e^{-1/(x+a)^2} = e^{-1/y^2} = o(y^n) \quad \text{per } y \to 0,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque si ha che, per $x \to -a$,

$$f(x) = by^2 + e^{-1/y^2} = by^2 + o(y^2) = b(x+a)^2(1+o(1)).$$

Inoltre, usando gli sviluppi $\log(1+y) = y - y^2/2 + y^3/3 + o(y^3)$, $\sin y = y - y^3/6 + o(y^3)$ e $\cos y = 1 - y^2/2 + o(y^3)$ per $y \to 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(1+y) + 1 - \sin y - \cos y \\ &= (x+a) - \tfrac{1}{2}(x+a)^2 + \tfrac{1}{3}(x+a)^3 + 1 - (x+a) + \tfrac{1}{6}(x+a)^3 - 1 + \tfrac{1}{2}(x+a)^2 + o((x+a)^3) \\ &= \tfrac{1}{2}(x+a)^3(1+o(1))). \end{aligned}$$

Inoltre, poiché $\log(|x+a|) \to -\infty$ e $(x+a)\log(|x+a|) \to 0$, si ha che

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1+o(1)}{2\log(|x+a|)} \to 0, \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{(x+a)\log(|x+a|)}{b(1+o(1))} \to 0 \qquad \text{per } x \to -a,$$

quindi l'ordine richiesto è

$$f(x),\ h(x),\ g(x).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Determinare il polinomio di Maclaurin di ordine 5 di

$$f(x) = \sin(\log(1 + ax)).$$

$[a = \pm 2, \pm 3]$

Svolgimento: Per $y \to 0$ si ha che $\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + o(y^5)$ e $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5)$, quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)) \\ &= \left(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)\right) \\ &\qquad - \tfrac{1}{6}\left(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 + o(x^3)\right)^3 + \tfrac{1}{120}\left(ax + o(x)\right)^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Inoltre, essendo $(1 + y)^3 = 1 + 3y + \binom{3}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + 3y + 3y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} \left(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 + o(x^3)\right)^3 &= a^3x^3\left(1 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{3}a^2x^2 + o(x^2)\right)^3 \\ &= a^3x^3\left(1 - \tfrac{3}{2}ax + a^2x^2 + \tfrac{3}{4}a^2x^2 + o(x^2)\right) \\ &= a^3x^3 - \tfrac{3}{2}a^4x^4 + \tfrac{7}{4}a^5x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} f(x) &= ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5) \\ &\qquad - \tfrac{1}{6}\left(a^3x^3 - \tfrac{3}{2}a^4x^4 + \tfrac{7}{4}a^5x^5 + o(x^5)\right) + \tfrac{1}{120}(a^5x^5 + o(x^5)) + o(x^5) \\ &= ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{6}a^3x^3 + \tfrac{24-20-15+1}{120}a^5x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Per l'unicità nel Teorema di Peano, il polinomio richiesto è pertanto

$$ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{6}a^3x^3 - \tfrac{1}{12}a^5x^5.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}}\, dx.$$

[$b = 5, 4, 3, 2$]

<u>*Svolgimento:*</u> Poiché la funzione integranda è continua in $\mathbb{R}^+$, basta studiare la convergenza dell'integrale per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Poiché $\sin^b x + x^{b+2} = x^b(\frac{\sin^b x}{x^b} + x^2) \sim x^b$ e $\sqrt{e^{-x} + x^6} \to 1$ per $x \to 0^+$, si ha

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} \sim \frac{x^b}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - b}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge per $x \to 0^+$ se e solo se $\alpha - b < 1$, ovvero se e solo se $\alpha < b + 1$.
Per $x \to +\infty$ invece si osservi che $\frac{\sin^b x}{x^{b+2}} \to 0$, da cui

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} = \frac{x^{b+2}(\frac{\sin^b x}{x^{b+2}} + 1)}{x^{\alpha+3}\sqrt{1 + \frac{e^{-x}}{x^6}}} \sim \frac{x^{b+2}}{x^{\alpha+3}} = \frac{1}{x^{\alpha-b+1}} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge per $x \to +\infty$ se e solo se $\alpha - b + 1 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > b$.
In conclusione, l'integrale improprio è convergente se e solo se $b < \alpha < b + 1$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (ae^{-2x}+1)y' = ay(e^{-2x}-1) \quad \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Determinare $y(x)$ e il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$.
$[a = 7, 5, 1, 3]$

Svolgimento: Poiché $ae^{-2x}+1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'equazione considerata si può riscrivere

$$y' = a\frac{e^{-2x}-1}{ae^{-2x}+1}y,$$

che è del primo ordine, lineare e omogenea (o anche a variabili separabili), quindi la sua soluzione generale è

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \text{dove } C \in \mathbb{R} \text{ e } A(x) = a\int \frac{e^{-2x}-1}{ae^{-2x}+1}\,dx.$$

Ponendo $t = e^{-2x} > 0$ si ha che $dx = -\frac{1}{2t}\,dt$ e

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{a}{2}\int \frac{t-1}{t(at+1)}\,dt = -\frac{a}{2}\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{a+1}{at+1}\right)dt \\ &= \frac{a}{2}\log t - \frac{a+1}{2}\log(at+1) = \frac{a}{2}\log e^{-2x} - \frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1) \\ &= -ax - \frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1). \end{aligned}$$

Si determina C dalla condizione $y(0) = -1$: $y(0) = Ce^{A(0)} = -1$, ovvero

$$C = -e^{-A(0)} = -e^{\frac{a+1}{2}\log(a+1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}.$$

Perciò

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-ax-\frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-ax}(1+ae^{-2x})^{-\frac{a+1}{2}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-ax}(1+o(1))^{-\frac{a+1}{2}} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty.$$