Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2024 - II Turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{x+b}{a-x}} \ ,$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[(a, b) = (1, 3), (2, 5), (1, 4), (1, 5)]$.

Svolgimento: L'unica condizione sul dominio è che sia ben definita frazione $\frac{x+b}{a-x}$ che equivale ad imporre $x - a \neq 0$. Quindi il dominio della funzione è

$$D_f := (-\infty, a) \cup (a, +\infty).$$

Inoltre f è continua e non negativa nel suo dominio, si annulla solo per $x = 0$, e non ha simmetrie evidenti.
È allora necessario studiare l'esistenza di asintoti per $x \to \pm\infty$ e per $x = a^{\pm}$. Per quanto riguarda gli asintoti obliqui, si osservi che per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\frac{x+b}{a-x} = -\frac{1}{x}\frac{x+b}{1-a/x} = -\frac{1}{x}(x+b)\left(1 + \frac{a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -1 - \frac{a+b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \cdot e^{\frac{x+b}{a-x}} = |x| \cdot e^{-1} e^{-\frac{a+b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{|x|}{e}\left(1 - \frac{a+b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{e}\left(|x| - (a+b)\ \mathrm{sgn}\, x + o(1)\right), \end{aligned}$$

quindi il grafico di f ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo di equazione $y = e^{-1}(x - a - b)$, mentre per $x \to -\infty$ quello di equazione $y = e^{-1}(-x + a + b)$. Avendosi poi

$$\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{x+b}{a-x} = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = 0,$$

si vede che il grafico di f ha la retta di equazione $x = a$ come asintoto verticale (sinistro).
La funzione f è derivabile in $D_f \setminus \{0\}$, ed essendo

$$\frac{d}{dx}\left[x e^{\frac{x+b}{a-x}}\right] = e^{\frac{x+b}{a-x}}\left(1 + x\frac{a+b}{(a-x)^2}\right) = e^{\frac{x+b}{a-x}}\frac{x^2 + (b-a)x + a^2}{(a-x)^2},$$

si trova

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{x^2+(b-a)x+a^2}{(a-x)^2} & \text{se } x < 0, \\ e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{x^2+(b-a)x+a^2}{(a-x)^2} & \text{se } x > 0,\ x \neq a. \end{cases}$$

Inoltre essendo f continua in $x = 0$ e derivabile in un intorno destro e sinistro di tale punto, possiamo studiare la sua derivabilità in $x = 0$ utilizzando il corollario del teorema di Lagrange:

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \pm e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{x^2 + (b-a)x + a^2}{(a-x)^2} = \pm e^{b/a},$$

e quindi f non è derivabile per $x = 0$ (punto angoloso).
Per studiare la monotonia di f è necessario studiare il segno del polinomio quadratico $p(x) := x^2 + (b - a)x + a^2$, che ha discriminante $\Delta = (b-a)^2 - 4a^2$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&(a,b) = (1,3) \;\Rightarrow\; \Delta = 0, \quad \text{e quindi} \quad p(x) \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R},\ \text{e } p(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{a-b}{2} = -1,\\
&(a,b) = (2,5) \;\Rightarrow\; \Delta < 0, \quad \text{e quindi} \quad p(x) > 0\, \forall x \in \mathbb{R},\\
&(a,b) = (1,4),(1,5) \;\Rightarrow\; \Delta > 0, \quad \text{e quindi} \quad p(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x < x_- \text{ o } x > x_+,
\end{aligned}$$

dove $x_\pm = -\frac{1}{2}(b-a) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - 4a^2}$. Tenendo allora conto che $x_\pm < 0$, e che il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $p(x)$ per $x > 0$, mentre è l'opposto di quello di $p(x)$ se $x < 0$, si conclude che nei casi $(a,b) = (1,3),(2,5)$ f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, a)$ e in $(a, +\infty)$, ed ha quindi un minimo assoluto in $x = 0$ e non ha massimi relativi (e quindi nemmeno assoluti), mentre nei casi $(a,b) = (1,4),(1,5)$ f è strettamente decrescente in $(-\infty, x_-]$, strettamente crescente in $[x_-, x_+]$, di nuovo strettamente decrescente in $[x_+, 0]$ e infine strettamente crescente in $[0, a)$ e in $(a, +\infty)$, ed ha quindi un minimo relativo (ma non assoluto) in $x = x_-$, un massimo relativo (ma non assoluto, poiché $\sup f = +\infty$) in $x = x_+$, e infine un minimo assoluto in $x = 0$.

FIGURA 1. Grafico di f con $(a,b) = (1,4)$.

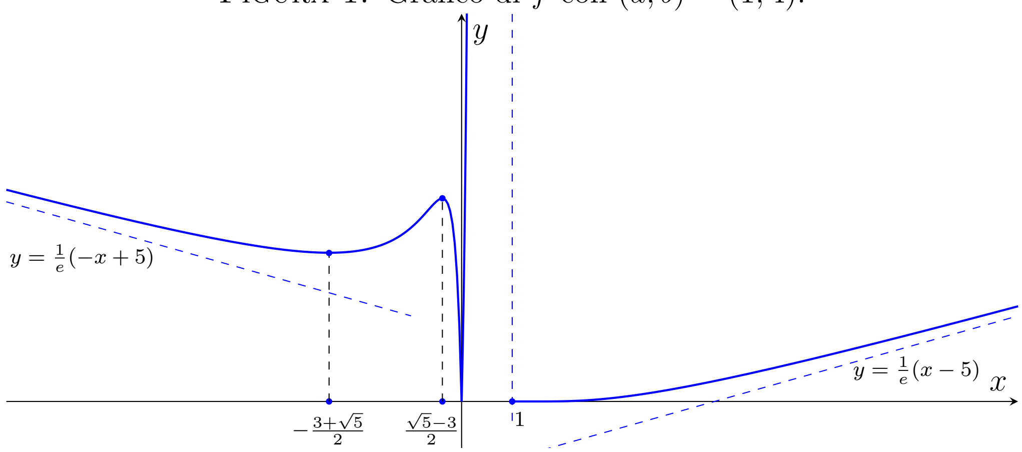
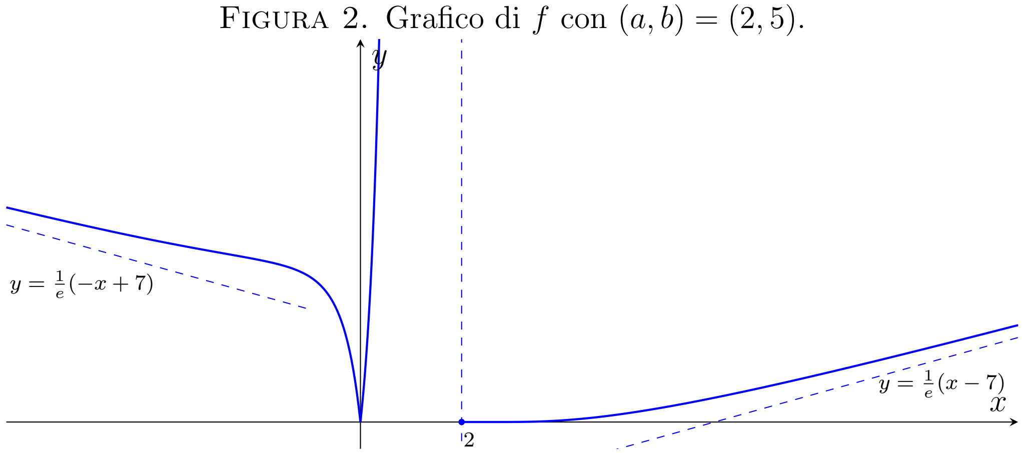


FIGURA 2. Grafico di f con $(a,b) = (2,5)$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x}+3)^2\,\sqrt{x}}\,dx\ .$$

$[a = 5, 1, 2, 4]$

<u>*Svolgimento:*</u> Sostituendo $t = \sqrt{x}$, da cui $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, e integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x}+3)^2\,\sqrt{x}}\,dx &= 2\int \frac{\ln(t^2 + (3+a)t + 3a)}{(t+3)^2}\,dt \\ &= -2\frac{\ln(t^2 + (3+a)t + 3a)}{t+3} + 2\int \frac{2t+3+a}{(t+3)(t^2+(3+a)t+3a)}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo termine, scomponendo il polinomio quadratico a denominatore si ha

$$\int \frac{2t+3+a}{(t+3)(t^2+(3+a)t+3a)}dt = \int \frac{2t+3+a}{(t+3)^2(t+a)}dt,$$

e la funzione integranda si decompone in fratti semplici come

$$\frac{2t+3+a}{(t+3)^2(t+a)} = \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+3} + \frac{C}{(t+3)^2},$$

con le costanti A, B, C che soddisfano la relazione

$$A = \frac{1}{3-a},\ C = 1,\ B + A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3-a}\ .$$

Quindi

$$\int \frac{2t++3+a}{(t+3)^2(t+a)}dt = \int \Big(\frac{1}{3-a}\frac{1}{t+a} - \frac{1}{3-a}\frac{1}{t+3} + \frac{1}{(t+3)^2}\Big)dt = \frac{1}{3-a}\ln\left|\frac{t+a}{t+3}\right| - \frac{1}{t+3},$$

e una primitiva della funzione integranda di partenza, espressa nella variabile t, è la funzione

$$F(t) = -2\frac{\ln(t^2+(3+a)t+3a)}{t+3} + \frac{2}{3-a}\ln\left|\frac{t+a}{t+3}\right| - \frac{2}{t+3}.$$

Infine, poiché $t \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e $t \to 0^+$ per $x \to 0^+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x}+3)^2\,\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{t\to 0^+} F(t) = \frac{2\ln(3a)}{3} - \frac{2}{3-a}\ln\Big(\frac{a}{3}\Big) + \frac{2}{3}\ .$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [6 punti] Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x'' - bx' = e^{bt} \ .$$

Risolvere il problema di Cauchy $x'(0) = x(0) = 0$.
$[b = -1, 2, -2, 1]$

Svolgimento: Si tratta di una equazione del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo la soluzione generale dell'omogenea

$$x'' - bx' = 0.$$

Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - b\lambda = 0$ sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = b$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea è

$$x_o(t) = A + Be^{bt}.$$

Il termine noto è la funzione $f(t) = te^{bt}$. Applichiamo il metodo di similitudine cercando una soluzione particolare della forma

$$x_p(t) = tKe^{bt},$$

in quanto b è radice del polinomio caratteristico. Imponendo che x_p verifichi l'equazione differenziale originaria si ha

$$x_p''(t) - bx_p'(t) = 2bKe^{bt} + tb^2Ke^{bt} - bKe^{bt} - tb^2Ke^{bt} = be^{bt}K = e^{bt} \Rightarrow K = 1/b,$$

e di conseguenza

$$y(t) = \frac{te^{bt}}{b}.$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea sarà dunque

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = A + Be^{bt} + \frac{te^{bt}}{b}.$$

Per il problema di Cauchy si ha

$$x(0) = A + B = 0, \quad x'(0) = bB + \frac{1}{b} = 0,$$

da cui $A = -B = \frac{1}{b^2}$. In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{1}{b^2}(1 - e^{bt} + bte^{bt}).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+ax+a^2x^2/2)-\arctan(ax)}{\arctan(bx-b\sin(x))+\ln(x+bx^4)-\ln(x)} \ .$$

$[(a,b)=(2,-1),(1,1),(-1,1),(2,1)]$

Svolgimento: Usando gli sviluppi

$$\sin t = t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3), \quad \log(1+t)=t+o(t), \quad \arctan t = t+o(t) \quad \text{per } t\to 0,$$

per il denominatore si ha, per $x\to 0$,

$$\begin{aligned}\arctan(bx-b\sin(x))+\ln(x+bx^4)-\ln(x) &= \arctan(bx-b\sin(x))+\ln(1+bx^3)\\ &= \arctan(bx^3/6+o(x^3))+bx^3+o(x^3) = bx^3/6+bx^3+o(x^3)\\ &= \frac{7b}{6}x^3+o(x^3)\ .\end{aligned}$$

Basta allora sviluppare il numeratore a meno di termini $o(x^3)$. Usando allora gli sviluppi

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3), \quad \arctan t = t-\frac{1}{3}t^3+o(t^3) \quad \text{per } t\to 0,$$

otteniamo, per $x\to 0$,

$$\begin{aligned}\ln(1+ax+a^2x^2/2)-\arctan(ax) &= ax+\frac{a^2x^2}{2}-\frac{(ax+a^2x^2/2)^2}{2}+\frac{(ax+a^2x^2/2)^3}{3}+\\ &\quad +o\left((ax+a^2x^2/2)^3\right)-ax+\frac{a^3x^3}{3}+o(x^3)\\ &= ax+\frac{a^2x^2}{2}-\frac{(ax+a^2x^2/2)^2}{2}+\frac{(ax+a^2x^2/2)^3}{3}-ax+\frac{a^3x^3}{3}+o(x^3)\\ &= ax+\frac{a^2x^2}{2}-\frac{1}{2}(a^2x^2+a^3x^3)+\frac{a^3x^3}{3}-ax+\frac{a^3x^3}{3}+o(x^3)\\ &= -\frac{a^3x^3}{2}+\frac{a^3x^3}{3}+\frac{a^3x^3}{3}+o(x^3)\\ &= \frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+ax+a^2x^2/2)-\arctan(ax)}{\arctan(bx-b\sin(x))+\ln(x+bx^4)-\ln(x)} &= \frac{\frac{a^3x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{7b}{6}x^3+o(x^3)}\\ &= \frac{a^3}{7b}(1+o(1)) \overset{x\to 0^+}{\to} \frac{a^3}{7b}.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \arctan(\alpha x)\ , & x \geq 0; \\ a + bx + cx^2\ , & x < 0\ . \end{cases} \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Trovare per quali valori di a, b, c la funzione risulta simultaneamente continua, derivabile ed invertibile in $\mathbb{R}$.
$[\alpha = 2, -2, 1, -1]$

<u>*Svolgimento:*</u> Per $x \neq 0$ si tratta di una funzione di classe C^∞. Basta allora studiare la continuità e derivabilità di f per $x = 0$. Chiaramente f è continua da destra in $x = 0$. Imponimo la continuità da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a + bx + cx^2 = a = f(0) = \arctan(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0\ .$$

Imponiamo ora che sia derivabile per $x = 0$. Si osservi che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}\ , & x > 0; \\ b + 2cx\ , & x < 0 \end{cases}$$

allora

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha}{1 + (\alpha x)^2} = \alpha = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = b + 2cx = b$$

da cui se $b = \alpha$ si ha che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e, in particolare, $f'(0) = \alpha$. Si osservi che abbiamo usato il corollario del Teorema di Lagrange: f è continua in 0 e derivabile in un intorno di 0. L'esistenza del limite delle derivate prime in 0 implica che f è derivabile con derivata uguale al limite.
Per quanto riguarda l'invertibilità, come appena visto per $x > 0$, $f'(x) = \frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}$, e quindi f è strettamente crescente o decrescente in tale regione a seconda del segno di α. Affinchè allora f sia invertibile in tutto $\mathbb{R}$ dobbiamo imporre che per ogni $x < 0$, $f'(x) = \alpha + 2cx$ abbia lo stesso segno di α. Nel caso $\alpha < 0$, si ha

$$\alpha + 2cx < 0 \quad \forall x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c > -\frac{\alpha}{2x} \quad \forall x < 0,$$

e dunque, essendo chiaramente $\sup_{x<0}\{-\frac{\alpha}{2x}\} = 0$, si conclude che $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$ se e solo se $c \geq 0$. Analogamente, se $\alpha > 0$ si ha

$$\alpha + 2cx > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < -\frac{\alpha}{2x} \quad \forall x < 0,$$

e dunque, essendo in questo caso $\inf_{x<0}\{-\frac{\alpha}{2x}\} = 0$, si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x < 0$ se e solo se $c \leq 0$.
In conclusione i valori richiesti dal problema sono

$$a = 0, \quad b = \alpha, \quad -(\operatorname{sgn}\alpha)c \in [0, +\infty).$$