Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2023

Cognome: (in `STAMPATELLO`)
Nome: (in `STAMPATELLO`)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x - \cos x} - \sin x - \log\left(\sqrt[6]{1+x^3}\right)}{(\sinh x - \sin x)^a}$$

$[a = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

Svolgimento: Per quanto riguarda il denominatore, dagli sviluppi noti, per $x \to 0$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

risulta

$$(\sinh x - \operatorname{sen} x)^a = \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^a = \frac{x^{3a}}{3^a}(1+o(1))^a = \frac{x^{3a}}{3^a}(1+o(1)) = \frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a}).$$

Analizziamo gli addendi al numeratore. Dagli sviluppi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0,$$

segue

$$\cosh x - \cos x = x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6),$$

e usando allora lo sviluppo

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ottiene

$$(\cosh x - \cos x)^{1/2} = x\left(1 + \frac{x^4}{360} + o(x^4)\right)^{1/2} = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{360} + o(x^4)\right) = x + \frac{x^5}{720} + o(x^5).$$

Inoltre in base allo sviluppo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$

e osservando che $\frac{1}{2}(x^3)^2 = o(x^5)$, si ha

$$\log(\sqrt[6]{1+x^3}) = \frac{1}{6}\log(1+x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^5).$$

Usando infine lo sviluppo

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0,$$

si ottiene

$$\text{Numeratore } = x+\frac{x^5}{720}-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+o(x^5)=-\frac{1}{144}x^5+o(x^5).$$

Quindi il imite proposto risulta uguale a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{144}x^5+o(x^5)}{\frac{x^{3a}}{3^a}+o(x^{3a})}=\begin{cases} -\infty & \text{se } a=\frac{7}{3},\frac{8}{3} \\ 0 & \text{se } a=\frac{1}{3},\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Osserviamo che nei casi $a=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ era sufficiente in realtà sviluppare il numeratore ad un ordine più basso. Ad esempio se $a=\frac{2}{3}$, il denominatore è, come visto,

$$(\sinh x-\sin x)^{2/3}=\frac{x^2}{3^{2/3}}+o(x^2),$$

e dunque è sufficiente determinare, se esiste, il primo ordine non nullo e minore o uguale a 2 del numeratore. Si avrà dunque, ragionando come sopra ma arrestando gli sviluppi all'ordine 2,

$$\begin{aligned} (\cosh x-\sinh x)^{1/2}&=(x^2+o(x^3))^{1/2}=x(1+o(x))^{1/2}=x+o(x^2),\\ \log(\sqrt[6]{1+x^3})&=o(x^2),\\ \sin x&=x+o(x^2),\\ \text{Numeratore }&=x-x+o(x^2)=o(x^2), \end{aligned}$$

e dunque il limite richiesto si poteva calcolare come

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{o(x^2)}{\frac{x^2}{3^{2/3}}+o(x^2)}=0.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

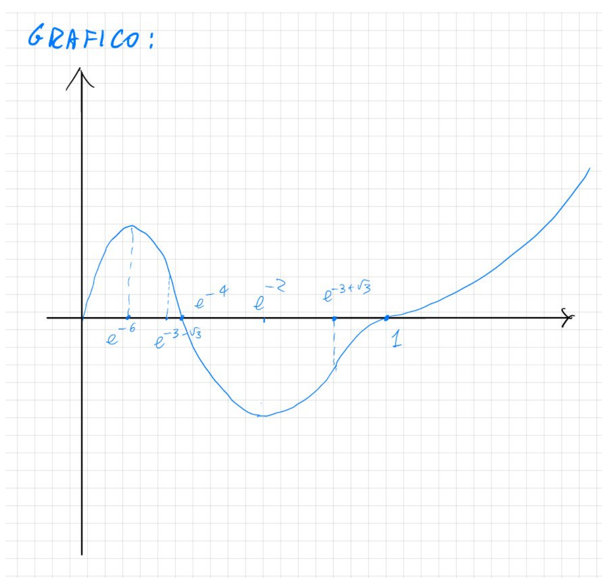
$$f(x) = \pm\big(\log x + a\big)x\log^3 x$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.
Facoltativo: studiare la derivata seconda e determinare gli intervalli di concavità/convessità e eventuali punti di flesso.

$[a = 4, -4]$.

Svolgimento: La funzione sotto studiata è $f(x) = (\log x + 4)x\log^3 x$.

- Non vi sono simmetrie né periodicità.
- Il dominio della funzione è $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.
- $f \in C^\infty(\mathcal{D})$, quindi in particolare non ci sono punti di non derivabilità.
- $f(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow x \in (0, e^{-4}] \cup [1, +\infty)$.
- Per le gerarchie di infiniti e infinitesimi si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
quindi non ci sono asintoti né verticali, né orizzontali, né obliqui, e f può essere estesa a una funzione continua in $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 0$.
- Si ha $f'(x) = (\log^2 x)(\log^2 x + 8\log x + 12)$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi $x = 0$ è un punto a tangente verticale per la funzione estesa.
- Ponendo $t = \log x$ ed essendo $t^2 + 8t + 12 \geq 0$ se e solo se $t < -6$ o $t > -2$, si vede che $f'(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow x \in (0, e^{-6}] \cup [e^{-2}, +\infty)$, e pertanto:
$x = e^{-6}$ risulta essere punto di massimo relativo, con $f(e^{-6}) = \frac{2\cdot 6^3}{e^6}$;
$x = e^{-2}$ risulta essere punto di minimo assoluto, con $f(e^{-2}) = -\frac{16}{e^2}$.
- $f''(x) = \frac{4}{x}[(\log x)(\log^2 x + 6\log x + 6)]$, e dunque $f''(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow x \in [e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}] \cup [1, +\infty)$.
Abbiamo quindi i punti di flesso: $x = e^{-3-\sqrt{3}}, x = e^{-3+\sqrt{3}}, x = 1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}) \sinh^\alpha x}{x^{2\alpha}(A + e^{-x})} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[A = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Convergenza. Poiché per $x \to 0$ si ha $\sinh x \sim x$ e $e^{-x}, e^{-1/2x} \to 0$, la funzione integranda $f(x)$ ha l'andamento asintotico

$$f(x) \sim \frac{2x^\alpha}{Ax^{2\alpha}} = \frac{2}{A} x^{-\alpha},$$

quindi l'integrale converge nell'intervallo $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$ si ha invece

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}(1 + e^{-\frac{1}{2}x}) \left(e^x \frac{1-e^{-2x}}{2} \right)^\alpha}{x^{2\alpha}(A + e^{-x})} \sim \frac{e^{(\alpha - \frac{1}{2})x}}{Ax^{2\alpha}},$$

quindi l'integrale converge nell'intervallo $(1, +\infty)$ se $\alpha < \frac{1}{2}$ e diverge se $\alpha > \frac{1}{2}$. Se $\alpha = \frac{1}{2}$, l'integranda si comporta come $\frac{1}{Ax}$ e l'integrale diverge in $(1, +\infty)$.
Perciò l'integrale converge in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
Calcolo per $\alpha = 0$. Ponendo $y = e^{-\frac{1}{2}x}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}}{A + e^{-x}} dx &= \int_0^1 \frac{2 + 2y}{A + y^2} dy = \frac{2}{A} \int_0^1 \frac{dy}{1 + (y/\sqrt{A})^2} + \int_0^1 \frac{2y}{A + y^2} dy \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{A}} \arctan(y/\sqrt{A}) + \log(A + y^2) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{A}} \arctan(1/\sqrt{A}) + \log\left(\frac{A+1}{A} \right).\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^6 + (7-\mathrm{i})z^3 - 8 - 8\mathrm{i} = 0 \qquad \left[z^6 - (7-\mathrm{i})z^3 - 8 - 8\mathrm{i} = 0, \quad z^6 \pm (9+\mathrm{i})z^3 + 8 + 8\mathrm{i} = 0\right].$$

Svolgimento: Sostituiamo $\zeta = z^3$ e consideriamo l'equazione di secondo grado

$$\zeta^2 + (7-i)\zeta - 8 - 8i = 0. \tag{1}$$

Il discriminante di tale equazione è

$$(7-i)^2 + 4(8+8i) = 49 - 14i + i^2 + 32 + 32i = 81 + 18i + i^2 = (9+i)^2.$$

(Si noti che nei quattro compiti il discriminante è sempre un quadrato della forma $a^2 - 1 + 2ai = (a+i)^2$ con a intero.) Pertanto le radici di (1) sono $\zeta = -8 = 8e^{\mathrm{i}\pi}$ e $\zeta = 1 + i = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}$. Si conclude trovando le radici terze di questi due numeri complessi. Ovvero, le sei soluzioni sono:

$$-2, \quad 2e^{\mathrm{i}\pi/3}, \quad 2e^{\mathrm{i}5\pi/3}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}\pi/12}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}3\pi/4}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}17\pi/12}.$$

Le varianti si risolvono in maniera analoga, basterà notare che (1) è sempre della forma $(\zeta \pm 8)(\zeta \pm (1+i))$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell' ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{b}{\cos(ax)}$$

$[(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \sqrt{2}).]$

Svolgimento: Si ha:

$$\cos(ax) = 1 - \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ponendo $y = \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \to 0$ per $x \to 0$ si ha che, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(ax)} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)\\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^2 + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3\\ &\quad + o((\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3)\\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + \tfrac{a^4}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^4x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Infine, per $x \to 0$,

$$\frac{b}{\cos(ax)} = b + \tfrac{a^2b}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^4bx^4 + o(x^5).$$