Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 01/09/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\sin\left(\frac{a}{n^2}\right)+e^{\frac{a}{n^2}}+\cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{n}\right)-2\right)+7^n\log n}{n!\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4+n\cos(3n)}$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: $n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a ogni esponenziale ossia

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad \text{per ogni } a>0$$

Di conseguenza, per ogni $k\in\mathbb{N}$ si ha

$$\frac{7^n\log n}{n!}=o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{e} \quad \frac{n\cos(3n)}{n!}=o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

D'altra parte da

$$\begin{aligned}
\sin x &= x+o(x^2)\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\
\arctan x &= x+o(x)
\end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{a}{n^2}\right)+e^{\frac{a}{n^2}}+\cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{n}\right)-2 &= \frac{a}{n^2}+1+\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{2n^4}+1-\frac{2a}{n^2}+\frac{16a^2}{24n^4}-2+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&= \frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4=\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Quindi il limite richiesto si riscrive come

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+7^n\log n}{n!\left(\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+n\cos(3n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)+\frac{7^n\log n}{n!}}{\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)+\frac{n\cos(3n)}{n!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)} \\
&= \frac{7}{6}a^2\,.
\end{aligned}
$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> In tutti i casi $a > 0$ e $b > 0$. Il dominio di f è

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right) .$$

Inoltre f è continua in $\mathrm{dom} f$.

$f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ quindi $(0, 0)$ è l'unico punto di intersezione del grafico di f con gli assi cartesiani. Inoltre,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (ax + b > 0) \wedge (x \neq 0) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty) .$$

Consideriamo ora i possibili asintoti.

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}} \left| \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} \right| = \left| \frac{b/a}{0} \right| = +\infty$$

e quindi, tenendo conto del segno di f, si trova

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}^+} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{b}{a}^-} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = -\infty .$$

Di conseguenza la retta di equazione $x = -\frac{b}{a}$ è un asintoto verticale sia da destra che da sinistra. Inoltre,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = 0^{\pm} .$$

e quindi, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Studiamo ora la derivabilità, la monotonia e i punti di massimo e minimo locali e globali. f è chiaramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}, 0\}$ e quindi

$$\mathrm{dom} f' \supset \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty) .$$

Inoltre, per ogni $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{|x|}(ax+b) - a|x|^{\frac{1}{2}}}{(ax+b)^2} \\ &= \frac{x(b-ax)}{2|x|^{\frac{3}{2}}(ax+b)^2} . \end{aligned}$$

Studiamo la derivabilità di f per $x = 0$. Si ha

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{|h|^{\frac{1}{2}}}{ah+b} = +\infty$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\frac{|h|^{\frac{1}{2}}}{ah+b} = -\infty\,.$$

Quindi 0 è un punto di cuspide e

$$\mathrm{dom} f' = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty)\ .$$

Determiniamo ora i punti critici e gli inervalli di monotonia. Per $x \in \mathrm{dom} f'$ abbiamo

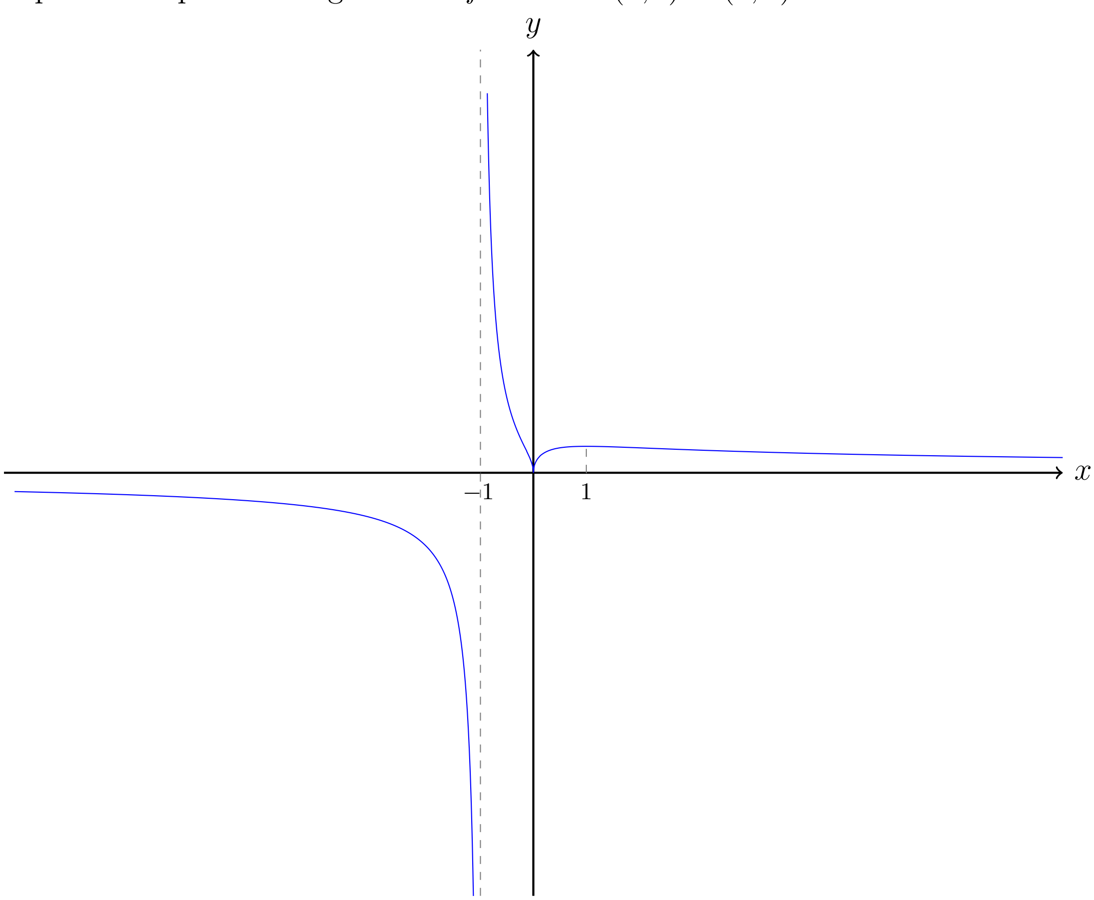
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(b-ax) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

e quindi $x = \frac{b}{a}$ è l'unico punto critico di f. Inoltre,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x(b-ax) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{b}{a}\right).$$

Di conseguenza, f è strettamente crescente in $\left(0, \frac{b}{a}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, in $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e in $\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Di conseguenza $x = 0$ è un punto di minimo locale $f(0) = 0$ è il corrispondente valore di minimo locale. Inoltre, $x = \frac{b}{a}$ è un punto di massimo locale e $f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ è il corrispondente valore di massimo locale. Non esistono punti di massimo o di minimo globale visto che la funzione non è limitata né inferiormente né superiormente,

Riportiamo qui sotto il grafico di f nel caso $(a, b) = (1, 1)$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a, b) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)]$

Svolgimento: In tutti i casi abbiamo $a > 0$ e $b > 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua e positiva in $[1, +\infty)$. Basta quindi studiare la convergenza a $+\infty$.

Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\arctan(ax^2)e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}} \sim \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi l'integrale improprio convergente se e solo se $\alpha \geq 0$.

Calcolo per $\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ l'integrale improprio è convergente. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(ax)}{x^2}\, dx &= -\int \arctan(ax)\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\, dx \\ &= -\frac{\arctan(ax)}{x} + \int \frac{a}{x + a^2x^3}\, dx\end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo che

$$\frac{1}{x + a^2x^3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{1 + a^2x^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D. Visto che

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{1 + a^2x^2} = \frac{A + Dx + (a^2A + B)x^2}{x + a^2x^3}$$

si deve avere $A = 1$, $D = 0$ e $B = -a^2$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int \frac{a}{x + a^2x^3}\, dx &= \int \frac{a}{x}\, dx - \int \frac{a^3x}{1 + a^2x^2}\, dx \\ &= a\log|x| - \frac{a}{2}\log(1 + a^2x^2) + C \\ &= \frac{a}{2}\log\frac{x^2}{1 + a^2x^2} + C\,.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^2}\, dx &= \lim_{s\to+\infty}\left(\arctan(a) - \frac{\arctan(as)}{s} + \frac{a}{2}\left(\log\frac{s^2}{1 + a^2s^2} - \log\frac{1}{1 + a^2}\right)\right) \\ &= \arctan(a) + \frac{a}{2}\left(\log\frac{1}{a^2} - \log\frac{1}{1 + a^2}\right) \\ &= \arctan(a) + \frac{a}{2}\log\frac{1 + a^2}{a^2}\,.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Determinare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\log(b + x^2 + x^3)}{a + \sin(x^2)}.$$

$[(a, b) = (2, 2), (-2, 3), (-2, 2), (2, 3)]$

Svolgimento: In tutti i casi $a \neq 0$ e $b > 0$. Si ha

$$\log(b + x^2 + x^3) = \log b + \log\left(1 + \frac{x^2 + x^3}{b}\right)$$

e usando allora lo sviluppo

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ottiene, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \log(b + x^2 + x^3) &= \log b + \frac{x^2 + x^3}{b} - \frac{(x^2 + x^3)^2}{2b^2} + o(x^4) \\ &= \log b + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b} - \frac{x^4}{2b^2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Inoltre dallo sviluppo $\sin t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$ si ha, sempre per $x \to 0$,

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4),$$

ed usando allora anche lo sviluppo

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 + o(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + \sin(x^2)} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + \frac{\sin(x^2)}{a}}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a} + o(x^4)}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\log(b + x^2 + x^3)}{a + \sin(x^2)} &= \left(\log b + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b} - \frac{x^4}{2b^2} + o(x^4)\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{\log b}{a} + \left(\frac{1}{ab} - \frac{\log b}{a^2}\right)x^2 + \frac{x^3}{ab} + \left(\frac{\log b}{a^3} - \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{a^2 b}\right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

e di conseguenza il polinomio richiesto è

$$\frac{\log b}{a} + \left(\frac{1}{ab} - \frac{\log b}{a^2}\right)x^2 + \frac{x^3}{ab} + \left(\frac{\log b}{a^3} - \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{a^2 b}\right)x^4.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$|z|^3 z + a|z|z = a^2\sqrt{2} + ia^2\sqrt{2}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: In tutti i casi $a > 0$. Poniamo $r = |z|$, $z = re^{i\varphi}$. Visto che $a^2\sqrt{2} + ia^2\sqrt{2} = 2a^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ l'equazione diventa

$$(r^4 + ar^2)e^{i\varphi} = 2a^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

che è soddisfatta se e solo se

$$r^4 + ar^2 = 2a^2 \quad \text{e} \quad e^{i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Da $r^4 + ar^2 = 2a^2$, tenendo conto che $r^2 \geq 0$, segue che $r^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+8a^2}}{2} = a$. Di conseguenza, essendo anche $r \geq 0$, $r = \sqrt{a}$. Quindi l'unica soluzione dell'equazione è $z = \sqrt{a}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{a}{2}}$.