Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/09/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{c}{2}x^2} - \cos(\sqrt{c}\,x)}{\left[a\left(\operatorname{sen}\sqrt{bx} - \sqrt{bx}\right)\right]^2 - b[\log(1+x)]^3}$$

$[(a,b,c) = (2,3,2),\ (2,3,3),\ (3,2,2),\ (3,2,3)]$

Svolgimento: Studieremo qui di seguito il caso $(a,b,c) = (2,3,2)$.
Per quanto riguarda il denominatore, usando gli sviluppi noti

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5), \qquad \log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \qquad \text{per } t\to 0,$$

si ha, per $x \to 0^+$,

$$\left[2(\operatorname{sen}\sqrt{3x} - \sqrt{3x})\right]^2 = 4\left(\sqrt{3x} - \frac{1}{6}(3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}(3x)^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) - \sqrt{3x}\right)^2 = 3x^3 - \frac{9}{10}x^4 + o(x^4),$$

$$3\,[\log(1+x)]^3 = 3\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Denominatore} = 3x^3 - \frac{9}{10}x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{18}{5}x^4 + o(x^4).$$

Basta allora sviluppare il numeratore a meno di termini $o(x^4)$. Allora dagli sviluppi noti

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \qquad \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ottiene, per $x \to 0$,

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$
$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Numeratore} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) = \tfrac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

Riassumendo, il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{18}{5}x^4 + o(x^4)} = \frac{5}{54}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}}\sqrt{b(x-a)^2 + x - a}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (1, 3), (-1, 3), (1, 4), (-1, 4)]$

Svolgimento: Si ha $f(x) = g(x-a)$ con $g(x) := e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x}$, e dunque il grafico di f è il grafico di g traslato a destra di a. Studiamo dunque la funzione g.
Poiché $bx^2 + x = x(bx + 1) \geq 0$ equivale a $x \leq -\frac{1}{b}$ o $x \geq 0$, il dominio di g è $D_g = (-\infty, -\frac{1}{b}] \cup (0, +\infty)$, e quello di f è $D = (-\infty, a - \frac{1}{b}] \cup (a, +\infty)$. Inoltre chiaramente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = a - \frac{1}{b}$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x} = 0,$$

e dunque il punto $x = a$ è di discontinuità eliminabile per f; inoltre per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x} &= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sqrt{1 + \frac{1}{bx}} \\
&= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2bx} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \pm\sqrt{b}\left(x - 1 + \frac{1}{2b}\right) + o(1),
\end{aligned}$$

e dunque le rette di equazione $y = \pm\sqrt{b}(x - a - 1 + \frac{1}{2b})$ sono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ per f.
La derivata di g è, per $x \in (-\infty, -\frac{1}{b}) \cup (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2}\sqrt{bx^2 + x} + \frac{2bx + 1}{2\sqrt{bx^2 + x}}\right] = e^{-\frac{1}{x}}\frac{2(bx^2 + x) + x^2(2bx + 1)}{2x^2\sqrt{bx^2 + x}} \\
&= e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}},
\end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{b})^-} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}} = -\infty,$$

si ha che $x = a - \frac{1}{b}$ è un punto a tangente verticale per il grafico di f, mentre essendo chiaramente

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}} = 0,$$

ponendo $f(a) := 0$ si otterrebbe una funzione continua e derivabile in $x = a$ con $f'(a) = 0$.
Le radici del polinomio $2bx^2 + (2b + 1)x + 2$ sono

$$x = \frac{-2b - 1 \pm \sqrt{4b^2 - 12b + 1}}{4b}$$

($4b^2 - 12b + 1 > 0$ per $b = 3, 4$), e poiché

$$\frac{-2b - 1 + \sqrt{4b^2 - 12b + 1}}{4b} < -\frac{1}{b} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{4b^2 - 12b + 1} < 2b - 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 < 9$$

si ha che g' è negativa in $(-\infty, \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, -\frac{1}{b})$, mentre è positiva in $(\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(0, +\infty)$. Dunque f è decrescente in $(-\infty, a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$

e in $(a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a-\frac{1}{b})$, mentre è crescente in $(a+\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(a,+\infty)$ e pertanto i punti

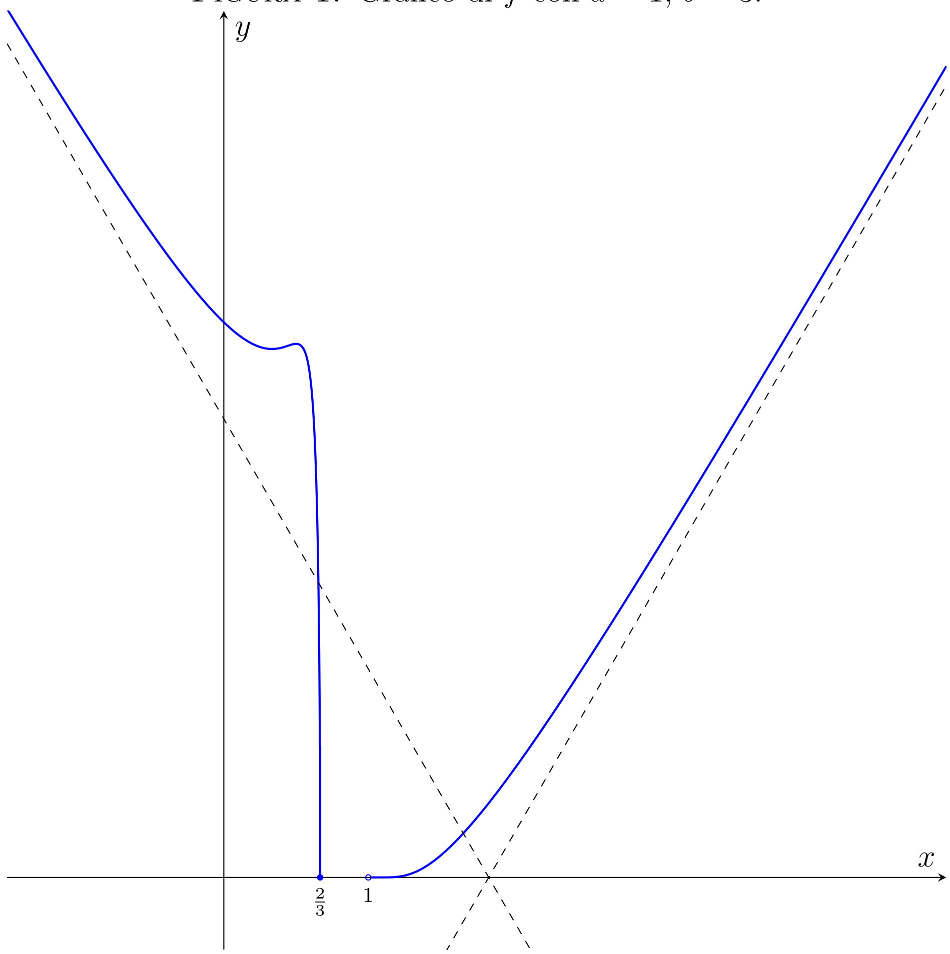
$$x = a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \quad x = a - \frac{1}{b}, \quad (\text{e } x = a \text{ per la funzione estesa}),$$

sono punti di minimo relativo e assoluto rispettivamente, mentre il punto

$$x = a + \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}$$

è di massimo relativo (ma non assoluto in quanto $\sup_D f = +\infty$).

Figura 1. Grafico di f con $a=1$, $b=3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_a^\infty \frac{(x-a)^{3-\alpha^{2b}}}{e^{\alpha x^3+(x-a)^2}}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (2,3), (3,2), (-1,3), (-1,2)]$

Svolgimento: Indichiamo con f_α la funzione integranda.
Studiamo la convergenza dell'integrale.

- Convergenza all'infinito:
  - se $\alpha < 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$, quindi l'integrale diverge;
  - se $\alpha \geq 0$ allora
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_\alpha(x) \leq \frac{1}{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \quad \text{definitivamente per } x \to +\infty.$$
  Poiché $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx < +\infty$, possiamo concludere che l'integrale converge all'infinito per il criterio del confronto.
- Convergenza nell'estremo $x = a$: osserviamo che per $x \to a$
$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{e^{\alpha a^3}} \frac{1}{(x-a)^{\alpha^{2b}-3}},$$
e quindi per il criterio del confronto asintotico si ha convergenza se e solo se
$$\alpha^{2b} - 3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{2b} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2^{1/b} < \alpha < 2^{1/b}.$$

Riassumendo:
$$\text{l'integrale converge} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \alpha < 2^{1/b}.$$

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 0$.
Eseguendo i cambiamenti di variabile $x - 2 = t$ e $t^2 = s$ e integrando per parti, si ha
$$\int_2^{+\infty} \frac{(x-2)^3}{e^{(x-2)^2}}\,dx = \int_0^{+\infty} t^3 \cdot e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} s e^{-s} ds = \frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty} \left[-(s+1)e^{-s}\right]_0^c = \frac{1}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ax(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza di y.

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: L'equazione data è a variabili separabili senza soluzioni stazionarie. Pertanto la soluzione si ottiene da

$$y' = ax(1+y^2) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{1+y^2} = ax \;\Leftrightarrow\; \arctan y = \frac{a}{2}x^2 + C.$$

La condizione iniziale $y(0) = 0$ implica che $C = 0$, quindi $\arctan y = \frac{a}{2}x^2$. Perciò $y(x) = \tan(\frac{a}{2}x^2)$. L'intervallo massimale di esistenza contenente $x = 0$ è determinato da $-\frac{1}{2}\pi < \frac{a}{2}x^2 < \frac{1}{2}\pi$, ovvero l'intervallo è $(-\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \sqrt{\frac{\pi}{a}})$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z^3 + 2z^2 + iz = 0 \ \left[z^3 + 2z^2 \pm iz = 0, \ \ z^3 - 2z^2 \pm iz = 0\right].$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: $z^3 + 2z^2 + iz = z(z^2 + 2z + i) = 0$ ovvero $z = 0$ o $z^2 + 2z + i = 0$:

$$z^2 + 2z + i = 0 \ \Leftrightarrow \ z = -1 \pm w$$

dove w è una delle due radici quadrate del numero complesso $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, quindi per esempio: $w = \sqrt[4]{2}(\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8))$.