Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/06/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

$[a=2,4,5,6]$

<u>*Svolgimento:*</u> Poiché per $x\to-\infty$ il termine dominante nel primo fattore del prodotto è x^3, bisogna sviluppare il secondo fattore fino a $o(\frac{1}{x^3})$ (se infatti ci fermasse ad esempio a $o(\frac{1}{x^2})$ si otterrebbe un termine $x^3 o(\frac{1}{x^2})=o(x)$ di cui non si potrebbe calcolare il limite per $x\to-\infty$). Usando allora gli sviluppi noti,

$$(1+t)^{1/2}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2),\qquad \sin t=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o(t^5),\qquad \text{per } t\to0,$$

e tenendo conto che per $x\to-\infty$ si ha definitivamente $|x|=-x$, si ottiene

$$a\sqrt{1+x^2}=a|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=-ax\left(1+\tfrac{1}{2x^2}-\tfrac{1}{8x^4}+o(\tfrac{1}{x^4})\right)=-ax-\tfrac{a}{2x}+\tfrac{a}{8x^3}+o(\tfrac{1}{x^3}),$$

$$(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\sin(\tfrac{1}{x})=(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\left(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{6x^3}+\tfrac{1}{120x^5}+o(\tfrac{1}{x^5})\right)=3(3-a)x+\tfrac{a}{2x}-\tfrac{a+7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3}).$$

Perciò

$$\begin{aligned}&(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\\&\quad=(x^3+1)\left(-ax-\tfrac{a}{2x}+\tfrac{a}{8x^3}+(4a-9)x+3(3-a)x+\tfrac{a}{2x}-\tfrac{a+7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})\right)\\&\quad=(x^3+1)\left(\tfrac{4a-7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})\right)=\tfrac{4a-7}{40}+o(1)\to\tfrac{4a-7}{40}.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{e^{-|x+b|} + 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità e eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)]$

Svolgimento: Il dominio è $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ e la funzione è continua in $\mathbb{R}$. Il grafico della funzione non interseca l'asse x. Il punto di intersezione con l'asse y è

$$(0, f(0)) = \left(0, \frac{a}{e^{-|b|} + 1}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$$

e quindi la retta di equazione $y = a$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$. Essendo la funzione continua su $\mathbb{R}$ non ci sono asintoti verticali.

La funzione è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e scrivendola come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^{-x-b}+1} & \text{per } x \geq -b, \\ \frac{a}{e^{x+b}+1} & \text{per } x < -b, \end{cases}$$

si calcola che la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-x-b}}{\left(e^{-x-b}+1\right)^2} & \text{per} \quad x > -b, \\ -\frac{ae^{x+b}}{\left(e^{x+b}+1\right)^2} & \text{per} \quad x < -b. \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$f'_+(-b) = \frac{a}{4} \quad \text{e} \quad f'_-(-b) = -\frac{a}{4} \neq f'_+(-b)\,.$$

Quindi la funzione non è derivabile per $x = -b$ che è un punto angoloso.

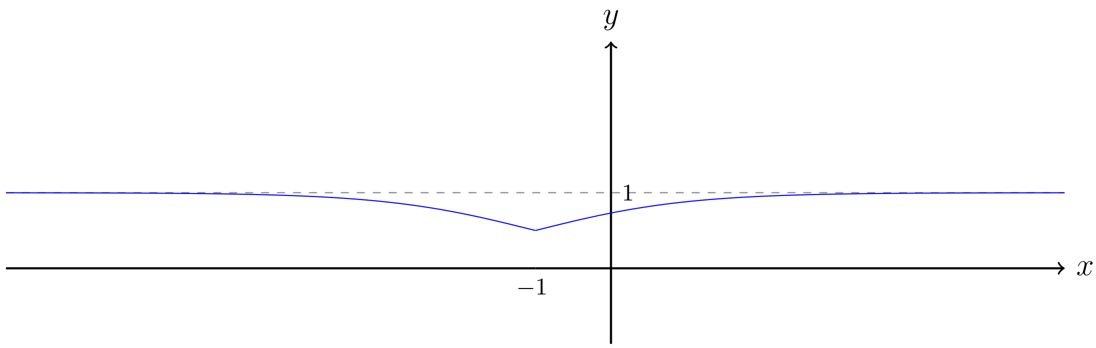
Dall'espressione della derivata segue che, per $a > 0$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-b, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -b)$. Quindi f è strettamente decrescente per in $(-\infty, -b)$ e strettamente crescente in $(-b, +\infty)$. Pertanto $x = -b$ è un punto di minimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale. Analogamente, per $a < 0$, f è strettamente crescente in $(-\infty, -b)$ e strettamente decrescente in $(-b, +\infty)$ e $x = -b$ è un punto di massimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale. In entrambi i casi si ha chiaramente $f(-b) = \frac{a}{2}$.

La $f'(x)$ è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e la sua derivata è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-x-b}\left(e^{-x-b}-1\right)}{\left(e^{-x-b}+1\right)^3} & \text{per} \quad x > -b, \\ \frac{ae^{x+b}\left(e^{x+b}-1\right)}{\left(e^{x+b}+1\right)^3} & \text{per} \quad x < -b. \end{cases}$$

Quindi, se $a > 0$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$. Pertanto f è strettamente concava in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$ e non ci sono punti di flesso. Si noti che f non è concava in $\mathbb{R}$ ad esempio perché, per $a > 0$, si ha $f'_+(-b) > \quad f'_-(-b)$. Analogamente, se $a < 0$, f è strettamente convessa in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$ e non ci sono punti di flesso. Inoltre f non è convessa in $\mathbb{R}$.

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $(a, b) = (1, 1)$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (2,2),(3,4),(4,5),(5,6)]$

Svolgimento: In tutti i casi abbiamo $b \geq a \geq 2$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua in $(0,+\infty)$. Basta quindi studiare la convergenza a $+\infty$ e la convergenza in (un intorno destro di) 0.
Studiamo prima la convergenza a $+\infty$. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{x^{b\alpha+3}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza a $+\infty$ se e solo se $b\alpha + 3 > 1$ ossia se e solo se $\alpha > -\frac{2}{b}$.
Studiamo ora la convergenza in 0. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{x^\alpha}{a^2} \quad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza in 0 se e solo se $\alpha > -1$.

Riassumendo, visto che $b \geq 2$ e quindi $-1 \leq -\frac{2}{b}$, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\alpha \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$.

Passiamo ora al calcolo per $\alpha = 0$. In questo caso l'integrale è convergente perché $0 \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$.
Dobbiamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\, dx.$$

Ricordando che $a \neq 1$, dalla teoria sappiamo che vale l'identità

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x+a)^2}$$

per opportune costanti reali A, B, C. Moltiplicando allora ambo i membri per $x+1$ e ponendo poi $x = -1$ si trova

$$A = \left.\frac{1}{(x+a)^2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{(a-1)^2};$$

analogamente moltiplicando ambo i membri per $(x+a)^2$ e ponendo $x = -a$ si ottiene

$$C = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=-a} = -\frac{1}{a-1};$$

infine da quanto appena ottenuto si ha che

$$\begin{aligned}\frac{B}{x+a} &= \frac{1}{(x+1)(x+a)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{a-1}{(x+a)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{(a-1)^2}\frac{x^2+(a+1)x+a}{(x+1)(x+a)^2} = -\frac{1}{(a-1)^2}\frac{1}{x+a},\end{aligned}$$

da cui chiaramente $B = -\frac{1}{(a-1)^2}$.
Quindi

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a} - \frac{a-1}{(x+a)^2}\right),$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log|x+1| - \log|x+a| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{x+1}{x+a}\right| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C\,.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \lim_{s\to+\infty}\int_0^{s} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx \\
&= \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{s+1}{s+a}\right| + \frac{a-1}{s+a} - \log\frac{1}{a} - \frac{a-1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log a - \frac{a-1}{a}\right)\,.
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = axy\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,, \\ y(0) = -b \end{cases}$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a, b) = (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e che ha $y(x) = 0$ come unica soluzione stazionaria. Essendo allora in tutti i casi il dato iniziale imposto in $x_0 = 0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y_0 = -b < 0$, si vede che la soluzione del problema di Cauchy dato avrà intervallo di esistenza massimale $I_0 \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e sarà tale che $y(x) < 0$ per ogni $x \in I_0$. Tale soluzione sarà dunque determinata dall'equazione:

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx.$$

Risolviamo il primo integrale, tenendo conto che come visto $y < 0$:

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log(-y) + c.$$

Risolviamo il secondo integrale per parti:

$$\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{2}\int x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}\Big)'dx = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\tan x + c.$$

Pertanto

$$\log(-y) = \frac{a}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2}\tan x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -b$ si ottiene $c = \log b$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -b\exp\Big(\frac{a}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2}\tan x\Big).$$

L'intervallo massimale di esistenza è quindi $I_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z\left(|z|^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\mathrm{i}\bar{z}|z|.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: $z = 0$ è soluzione dell'equazione. Per $z \neq 0$, si ponga $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, $\rho > 0$ e sostituendo nell'equazione

$$\rho e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\mathrm{i}\rho^2 e^{-\mathrm{i}\theta} \iff e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\rho e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\theta)}.$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^2 + \dfrac{1}{a^2} = 2\rho, \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{a}, \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, 1. \end{cases}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = \frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}), \quad z = -\frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}).$$