Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n - e\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right)\right]$$

$[a = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n+a}\right) &= \log\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2a}{n^3}\right)+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a+\frac{1}{2}}{n^2}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Dunque

$$\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n+a})} = e^{1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e\left(1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Essendo infine $\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right) = 1-\frac{2a+1}{2n}+\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} en^2\left(\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}-\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{16a^2+16a+5}{12}e.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log^2 x - a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}]$

Svolgimento: Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$. Risulta

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq -a \text{ o } \log x \geq a \Leftrightarrow 0 < x \leq e^{-a} \text{ o } x \geq e^a, \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-a}, e^a.$$

Inoltre, in base alle gerarchie di infiniti e infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x - a^2}{\sqrt{x}} = 0,$$

e dunque il grafico di f non presenta asintoti di nessun tipo, e ponendo $f(0) := 0$ la f si estende a una funzione continua in $x = 0$.
Per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + 4\log x - a^2}{2\sqrt{x}},$$

e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

dunque $x = 0$ è un punto a tangente verticale per la funzione estesa per continuità. Poiché poi

$$\log^2 x + 4\log x - a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x < -2 - \sqrt{4 + a^2} \text{ o } \log x > -2 + \sqrt{4 + a^2},$$

si ha che f è crescente per $0 < x \leq e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$ e $x \geq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$, e f è decrescente per $e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \leq x \leq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$. In particolare $x = e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$ è un punto di massimo relativo e $x = e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$ è un punto di minimo relativo, in corrispondenza dei quali

$$f(e^{-2-\sqrt{4+a^2}}) = e^{\frac{-2-\sqrt{4+a^2}}{2}}(8 + 4\sqrt{4 + a^2}) > 0, \quad f(e^{-2+\sqrt{4+a^2}}) = e^{\frac{-2+\sqrt{4+a^2}}{2}}(8 - 4\sqrt{4 + a^2}) < 0.$$

Per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{8 + a^2 - \log^2 x}{4x\sqrt{x}},$$

pertanto f è concava per $0 < x \leq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e $x \geq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e f è convessa per $e^{-\sqrt{8+a^2}} \leq x \leq e^{\sqrt{8+a^2}}$ e $x = e^{\pm\sqrt{8+a^2}}$ sono punti di flesso, tali che

$$f(e^{\pm\sqrt{8+a^2}}) = 8e^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{8+a^2}} > 0.$$

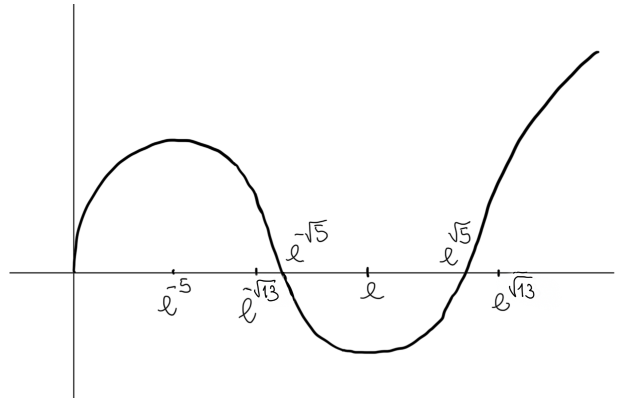

FIGURE 1. Grafico per $a = \sqrt{5}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha-1}(1+x)^2}\,dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 2$.

$[a = 2, 3]$

—–

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha+1}(1+x)^2}\,dx$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 4, 5]$

Svolgimento: Consideriamo il primo testo, con $a = 2$. Chiamiamo f_α la funzione integranda, che è continua in tutto l'intervallo di integrazione $(0, +\infty)$, e pertanto bisogna studiare la convergenza dell'integrale improprio solo negli intorni degli estremi.
Per $x \to 0^+$ si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{-2x^{1/2}(1+o(1))}{x^{\alpha-1}(1+o(1))} \sim \frac{-2x^{1/2}}{x^{\alpha-1}} = \frac{-2}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$

quindi f_α è definitivamente negativa per $x \to 0^+$ e per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, ovvero $\alpha < \frac{5}{2}$. Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{x^{3/2}(1+o(1))}{x^{\alpha-1}x^2(1+o(1))} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{\alpha-1}x^2} = \frac{1}{x^{\alpha-1/2}},$$

quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$. Riassumendo, c'è convergenza se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 2$. Con il cambio di variabile $x^{1/2} = t$ si ha

$$I := \int_0^\infty \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2}\, dx = \lim_{\substack{\omega' \to +\infty \\ \varepsilon' \to 0^+}} \int_{\varepsilon'}^{\omega'} \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2}\, dx = \lim_{\substack{\omega \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_{\varepsilon}^{\omega} \frac{t^3 - 2t}{t^2(1+t^2)^2}\, 2t\, dt$$

$$= \lim_{\substack{\omega \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} 2 \int_{\varepsilon}^{\omega} \frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2}\, dt$$

(dove ovviamente $\omega := \sqrt{\omega'}$, $\varepsilon := \sqrt{\varepsilon'}$). La primitiva della funzione integranda è:

$$\int \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int \left[-2\, \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + 3\, \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right] dt = -2 \operatorname{arctg} t + 3 \left(-\frac{1}{2}\, \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) + c$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} \frac{t}{1+t^2},$$

dove abbiamo utilizzato la nota soluzione per parti

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\, t\, dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+t^2}\, t + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \right).$$

Quindi l'integrale proposto diventa:

$$I = \lim_{\substack{\omega \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \left[-\operatorname{arctg} t - 3 \frac{t}{1+t^2} \right]_{\varepsilon}^{\omega} = -\frac{\pi}{2}.$$

In alternativa, per determinare la primtiva si può utilizzare il metodo di Hermite: cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2-2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\, \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Eseguendo i conti al lato destra dell'uguaglianza, siamo condotti a verificare

$$t^2 - 2 = At^3 + (B-C)t^2 + (A-2D)t + B + C,$$

ed eguagliando i coefficienti troviamo $A = D = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$, e pertanto

$$\int \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{d}{dt}\, \frac{-3t}{2(1+t^2)} \right] dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} \frac{t}{1+t^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\sin x = b\cos^2 x \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si tratta di un'equazione del I ordine lineare non omogenea, definita in $I = \mathbb{R}$, il cui integrale generale è

$$y(x) = e^{\int \sin x\, dx}\left[c + b\int e^{-\int \sin x\, dx}\cos^2 x \sin x\, dx\right] = e^{-\cos x}\left[c + b\int e^{\cos x}\cos^2 x \sin x\, dx\right].$$

Effettuando allora in cambio di variabile $t = \cos x$ e integrando per parti due volte si ha

$$\int e^{\cos x}\cos^2 x \sin x\, dx = -\int e^t t^2\, dt = -e^t(t^2 - 2t + 2) = -e^{\cos x}(\cos^2 x - 2\cos x + 2),$$

e pertanto

$$y(x) = ce^{-\cos x} - b(\cos^2 x - 2\cos x + 2),$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $a = y(\frac{\pi}{2}) = c - 2b$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy considerato è

$$y(x) = (a + 2b)e^{-\cos x} - b(\cos^2 x - 2\cos x + 2)$$

definita in $I = \mathbb{R}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w - z = \overline{z} \\ wz^2 = a\overline{w} \end{cases} .$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:

Dalla prima equazione risulta $w = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$, per cui deduciamo che w è un numero reale.

Quindi la seconda equazione è soddisfatta da:

- $w = 0$, che inserito nella prima equazione dice $\mathrm{Re}\, z = 0$ ed abbiamo le soluzioni
$$\begin{cases} z = y\, i \qquad y \in \mathbb{R} \\ w = 0. \end{cases}$$
- $w \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$, che inserito nella prima equazione dà $w = \pm 2\sqrt{a}$. Abbiamo allora le ulteriori soluzioni
$$\begin{cases} z = \sqrt{a} \\ w = 2\sqrt{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\sqrt{a} \\ w = -2\sqrt{a}. \end{cases}$$