Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Esame orale:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}}}{3b(x-\sin x)}.$$

$[(a,b) = (2,3), (-2,3), (3,2), (-3,2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) &= 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{ax}{2}}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{ax}{2}+\frac{a^2x^2}{4}-\frac{a^3x^3}{8}+o(x^3)\right)\right)\\
&= 4\sin\left(\frac{\pi a x}{4} - \frac{\pi a^2x^2}{8} + \frac{\pi a^3 x^3}{16} + o(x^3)\right)\\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{\pi a^3 x^3}{4} - \frac{1}{6}\frac{\pi^3 a^3 x^3}{16} + o(x^3)\\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)
\end{aligned}$$

e pertanto il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}} &= \pi a x - \frac{\pi a^2x^2}{2} + \frac{(24\pi-\pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3) - \pi a x\left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2)\right)\\
&= \frac{(12\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3),
\end{aligned}$$

e il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(12\pi-\pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)}{\frac{b}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{(12\pi-\pi^3)a^3}{48b}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-a}\, e^{\frac{1}{x-a}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, -2, 3, -3]$

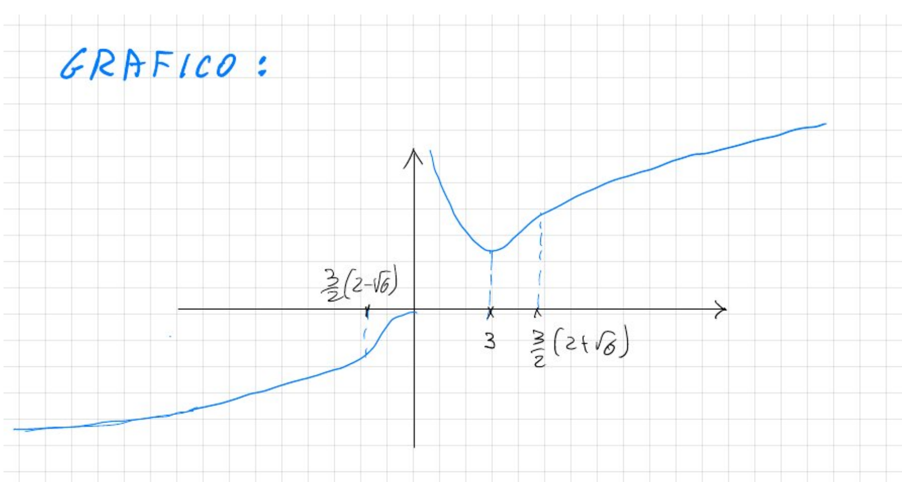
Svolgimento: In questo svolgimento studieremo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{1}{x}}$, di cui i grafici richiesti sono traslazioni.

- Non vi sono simmetrie (né nelle versioni proposte).
- Dominio: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) > 0 \;\Leftrightarrow x > 0$.
- Per le gerarchie di infiniti e infinitesimi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = (t = \frac{1}{x}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{1/3}} = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, quindi il grafico di f non presenta asintoti orizzontali né obliqui, e ha la retta $x = 0$ come asintoto verticale destro (ma non sinistro).
- $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{\frac{5}{3}}}(x-3)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$,

  e inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0^-$.
- $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

  $x = 3$ è quindi punto di minimo relativo, con $f(3) = (3e)^{\frac{1}{3}} > 0$.
- Calcoliamo $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{9\,x^{\frac{11}{3}}}(2\,x^2 - 12x - 9)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.
- $f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}(2-\sqrt{6})] \cup (0, \frac{3}{2}(2+\sqrt{6})]$.

  Abbiamo quindi i due punti di flesso: $x = \frac{3}{2}(2 \pm \sqrt{6})$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{ax+1}} \frac{x^{1+\alpha}}{(ax+2)^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: In tutti i casi si ha $a > 0$. Sia f_α la funzione integranda. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $(0,1) \cup (1, +\infty)$. Bisogna quindi verificare l'integrabilità in un intorno destro di 0, in un intorno di 1 e in un intorno di $+\infty$.
Risulta

$$f_\alpha(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{4} x^{1+\alpha} = \frac{1}{4x^{-1-\alpha}|\log x|^{-\alpha}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f_α è integrabile in un intorno destro di 0 se $-1-\alpha < 1$, cioè se $\alpha > -2$, e non è integrabile se $-1-\alpha > 1$, cioè se $\alpha < -2$; se infine $\alpha = -2$ si ha per quanto appena visto $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{4x \log^2 x}$ che è integrabile per $x \to 0^+$; dunque f_α è integrabile in un intorno destro di 0 se e solo se $\alpha \geq -2$. Inoltre

$$f_\alpha(x) = \frac{|\log(1+(x-1))|^\alpha x^{1+\alpha}}{(ax+2)^2\sqrt{ax+1}} \sim \frac{|x-1|^\alpha}{(a+2)^2\sqrt{a+1}} = \frac{1}{(a+2)^2\sqrt{a+1}} \frac{1}{|x-1|^{-\alpha}} \text{ per } x \to 1$$

e quindi f_α è integrabile in un intorno di 1 se e solo se $-\alpha < 1$, cioè $\alpha > -1$. Infine

$$f_\alpha(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{a^2\sqrt{a} x^{\frac{3}{2}-\alpha}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Pertanto analogamente al caso $x \to 0+$ si vede che f_α è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. In definitiva f_α è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$: in tal caso la funzione integranda è limitata per $x \to 0^+$, e dunque con la sostituzione $\sqrt{ax+1} = y$ si ha

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \lim_{\omega' \to +\infty} \int_0^{\omega'} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{2}{a^2} \int_1^{\omega} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy$$

(dove $\omega := \sqrt{2\omega'+1}$). Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\int \frac{1}{y^2+1} dy + 2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy.$$

Integrando per parti

$$\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{1}{2} \int y \left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy = -\frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy$$

da cui segue

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{y}{y^2+1}.$$

Pertanto si conclude

$$I = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{2}{a^2} \left[-\frac{y}{y^2+1} \right]_1^\omega = \frac{1}{a^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 + a^2}{xy}, \\ y(1) = -a, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione a variabili separabili senza soluzioni stazionarie, il cui secondo membro è definito per $x \neq 0$, $y \neq 0$. Poiché $y(0) < 0$ deve essere $y(x) < 0$ per ogni x nell'intervallo massimale di esistenza, che sarà contenuto in $(0, +\infty)$ poiché il dato iniziale è $x_0 = 1 > 0$. Separando le variabili si ottiene allora

$$\frac{1}{2} \log(y^2 + a^2) = \log |x| + c = \log x + c$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $c = \log(\sqrt{2}a)$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = -a\sqrt{2x^2 - 1},$$

il cui insieme di definizione è $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, e dunque l'intervallo massimale di esistenza dalla soluzione è $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ $(y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ non fa parte del dominio dell'equazione).

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \big(\cos x\big)^{a \sin x}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pertanto sarà sufficiente sviluppare $\cos(x)$ fino all'ordine 4 così come $\ln(\cos(x))$. Pertanto

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

e

$$\log(\cos(x)) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Ora

$$\begin{aligned}
\big(\cos x\big)^{a \sin x} &= \exp\big[a \sin(x) \log(\cos(x))\big] \\
&= \exp\left[a\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\right] \\
&= \exp\left(-a\frac{x^3}{2} + o(x^5)\right) \\
&= 1 - a\frac{x^3}{2} + o(x^5).
\end{aligned}$$