Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\log(1+ax^2)} - \arctan\left(\sqrt{a}x + cx^3\right)}{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}.$$

$[(a,c) = (2,1), (4,-1), (3,1), (9,-1)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Usando gli sviluppi, validi per $y \to 0$,

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \quad \log(1+y) = y + o(y), \quad e^y = 1 + y + o(y),$$

per il denominatore si ha

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^x = \exp\left(x \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

da cui segue

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Dunque basta sviluppare il numeratore al terzo ordine. Utilizzando allora gli sviluppi, validi per $y \to 0^+$,

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad , \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y), \quad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4),$$

si ottiene

$$\sqrt{\log(1+ax^2)} = \sqrt{ax^2 - \frac{a^2x^4}{2} + o(x^4)} = \sqrt{a}x\sqrt{1 - \frac{ax^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{a}x\left(1 - \frac{ax^2}{4} + o(x^2)\right)$$
$$= \sqrt{a}x - \frac{a\sqrt{a}x^3}{4} + o(x^3),$$

$$\arctan(\sqrt{a}x + cx^3) = \sqrt{a}x + cx^3 - a\sqrt{a}\frac{x^3}{3} + o(x^4) = \sqrt{a}x + \left(c - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right)x^3 + o(x^4),$$

da cui segue

$$\sqrt{\log(1+ax^2)} - \arctan(\sqrt{a}x + cx^3) = \left(c + \frac{a\sqrt{a}}{12}\right)x^3 + o(x^3).$$

Si conclude che il limite richiesto vale
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(c+\frac{a\sqrt{a}}{12}\right)x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \left(6c+\frac{a\sqrt{a}}{2}\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \cos^2 x \, e^{\frac{a}{\cos x}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})]$

Svolgimento: Consideriamo la funzione per $a = \sqrt{2}$:

$$f(x) = \cos^2 x \, e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}}.$$

Il dominio è chiaramente $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione è periodica (periodo 2π) e pari, basta quindi studiarla per esempio in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, dove è di classe C^1. $f > 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e

$$f(x) \to \begin{cases} +\infty & \text{per } x \to \frac{\pi}{2}^- \\ 0 & \text{per } x \to \frac{\pi}{2}^+ \end{cases}$$

e quindi la retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale (da sinistra) per il grafico di f, mentre ponendo $f(\frac{\pi}{2}) := 0$ si otterrebbe una funzione continua da destra.

Per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ si ha che

$$f'(x) = \sin x(\sqrt{2} - 2\cos x)e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}},$$

e inoltre

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 0,$$

pertanto la funzione estesa sarebbe derivabile da destra in $x = \frac{\pi}{2}$.

Infine per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ si ha $\sin x \geq 0$, e dunque

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{\pi}{4}, \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi,$$

pertanto f è decrescente nell' intervallo $[0, \frac{\pi}{4}]$, e f è crescente negli intervalli $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Perciò f ha massimi locali in $x = 0$, $x = \pi$, e un minimo locale in $x = \frac{\pi}{4}$, nei quali

$$f(0) = e^2, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^2}{2} > f(\pi) = e^{-\sqrt{2}}$$

(l'ultima disugugaglianza vale in quanto $e^{\sqrt{2}+2} > e > 2$.)

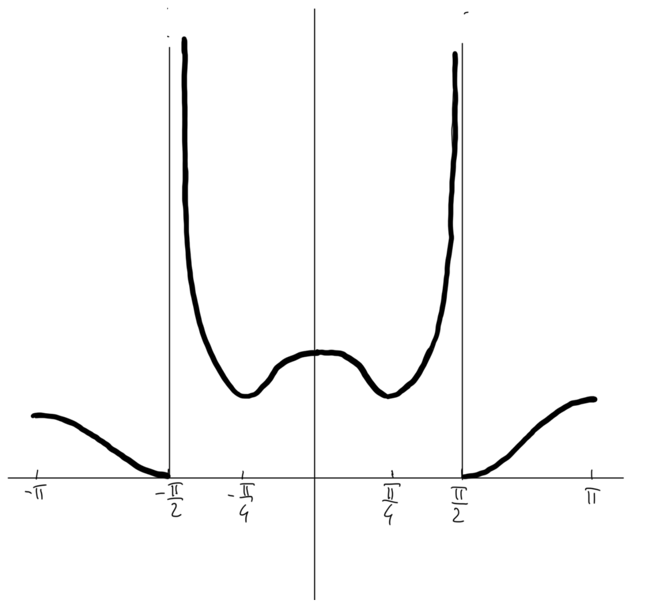

FIGURA 1. Grafico per $a = \sqrt{2}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{a/2} \sin^\alpha\Big(\frac{2\pi x}{a}\Big) \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Essendo $\sin y \sim y$ e $\arcsin y \sim y$ per $y \to 0$, risulta

$$f(x) \sim \Big(\frac{2\pi x}{a}\Big)^\alpha \frac{x}{a-x} \sim \frac{2^{\alpha+1}\pi^\alpha}{a^{\alpha+1}} x^{\alpha+1} = \frac{2^{\alpha+1}\pi^\alpha}{a^{\alpha+1}} \frac{1}{x^{-\alpha-1}} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è impropriamente integrabile in un intorno destro di $x = 0$ se e solo se $-\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha > -2$. D'altra parte, posto $y = \frac{a}{2} - x$, ricordando che $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$f(x) = \sin^\alpha\Big(\pi - \frac{2\pi}{a} y\Big) \arcsin\Big(\frac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2} + y}\Big) = \sin^\alpha\Big(\frac{2\pi}{a} y\Big) \arcsin\Big(\frac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2} + y}\Big) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha} y^\alpha \quad \text{per } y \to 0^+,$$

da cui

$$f(x) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha}\Big(\frac{a}{2} - x\Big)^\alpha = \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha} \frac{1}{\Big(\frac{a}{2} - x\Big)^{-\alpha}} \quad \text{per } x \to \frac{a}{2}^+.$$

Pertanto f è impropriamente integrabile in un intorno sinistro di $x = \frac{a}{2}$ se e solo se $-\alpha < 1$, cioè $\alpha > -1$. Segue che f è impropriamente integrabile in $(0, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha > -1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{a/2} \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx.$$

Integrando per parti si ha:
$$\int \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big)dx = x\arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) - \frac{a}{\sqrt{a}}\int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}}dx.$$
Con la sostituzione $\sqrt{a-2x} = y$ nell'ultimo integrale si ottiene
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}}dx &= -\int \frac{a-y^2}{a+y^2}dy = -\int \Big(\frac{2a}{a+y^2} - 1\Big)dy = -2\sqrt{a}\arctan\frac{y}{\sqrt{a}} + y \\ &= -2\sqrt{a}\arctan\frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} + \sqrt{a-2x}.\end{aligned}$$
Si deduce
$$\int \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big)dx = x\arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) + 2a\arctan\frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}}\sqrt{a-2x}.$$
Pertanto si conclude
$$\int_0^{a/2} \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big)dx = a\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big).$$
Alternativamente si può fare all'inizio il cambiamento di variabile $t = a - x$, e poi di nuovo integrare per parti, ottenendo ovviamente lo stesso risultato, con calcoli un po' più semplici.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{x^2-1}y + ax^2 \\ y(0) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

[$a = 5, 4, 3, 2$]

Svolgimento: Si tratta di un'equazione lineare del I ordine, il cui secondo membro è definito per $x \neq \pm 1$. Poiché allora la condizione iniziale è imposta in $x_0 = 0 \in (-1, 1)$, il dominio della soluzione sarà $(-1, 1)$. In tale intervallo si ha pertanto

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \log|x^2-1| = \log(1-x^2),$$

e l'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log(1-x^2)}\left(c + a\int e^{-\log(1-x^2)}x^2\,dx\right) \\ &= (1-x^2)\left(c + a\int\left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx\right) \\ &= (1-x^2)\left(c - ax + \frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx\right) \\ &= (1-x^2)\left(c - ax + \frac{a}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \\ &= (1-x^2)\left(c - ax + a\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $\frac{1+x}{1-x} > 0$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Imponendo poi la condizione iniziale si trova $c = a$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = a(1-x^2)\left(1 - x + \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right),$$

con intervallo di definizione $(-1, 1)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) \qquad \left[f(x) = \cos\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)\right]$$

Svolgimento: Il metodo standard sarebbe quello di fare prima lo sviluppo, per $x \to 0$,

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1 \pm x} = x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5),$$

e sviluppare poi

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \sin(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \tfrac{1}{6}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^3 + \tfrac{1}{120}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

il che però conduce a calcoli un po' complicati (potenze di pentanomi). È invece meno faticoso sviluppare prima il seno:

$$\sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) = \frac{x}{1 \pm x} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)^5 + o(x^6)$$

e usare poi tre volte lo sviluppo

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \binom{\alpha}{2}y^2 + \binom{\alpha}{3}y^3 + \binom{\alpha}{4}y^4 + o(y^4)$$

con $\alpha = -1, -3, -5$, ottenendo

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) &= x(1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 + o(x^4)) - \frac{1}{6}x^3(1 \mp 3x + 6x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \frac{1}{6}x^3 \pm \frac{1}{2}x^4 - x^5 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x \mp x^2 + \frac{5}{6}x^3 \mp \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)^4 + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2(1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{24}x^4(1 \mp 4x + o(x)) + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \pm x^3 - \frac{3}{2}x^4 \pm 2x^5 + \frac{1}{24}x^4 \mp \frac{1}{6}x^5 + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \pm x^3 - \frac{35}{24}x^4 \pm \frac{11}{6}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$