Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – II turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log\left(\sqrt{n-1}\right) - a}{n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2}.$$

[$a = -3, 3, -2, 2$]

<u>*Svolgimento:*</u>Per il denominatore si ha

$$n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2 = n\left(\frac{1}{n}\log n\right)^2 = \frac{\log^2 n}{n},$$

e dunque basta sviluppare il numeratore a meno di $o(\frac{\log^2 n}{n})$. Utilizzando allora gli sviluppi di Taylor per $x \to 0^+$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad \log(1+x) = x + o(x),$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} &= n\sqrt{1+\frac{2a}{n}}\sqrt{1-\frac{2a\log n}{n}} \\
&= n\left(1+\frac{a}{n}-\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{a\log n}{n}-\frac{a^2\log^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right) \\
&= n\Big(1-\frac{a\log n}{n}+\frac{a}{n}-\frac{a^2\log^2 n}{2n^2}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big) \\
&= n - a\log n + a - \frac{a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big),
\end{aligned}$$

$$2a\log(\sqrt{n-1}) = a\log(n-1) = a\log n + a\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = a\log n - \frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = a\log n + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big),$$

da cui segue

$$\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log(\sqrt{n-1}) - a = -\frac{a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big)}{\frac{\log^2 n}{n}} = -\frac{a^2}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = b \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)]$

Svolgimento: Il dominio è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0,\ -1 \leq \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1\right\}.$$

Poiché allora il discriminante del polinomio quadratico di x^2, $2x^4 - 2ax^2 + a^2$, è $-a^2 < 0$, si ha $2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \geq -1$$

è banalmente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq \sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2ax^2 + a^2 = (x^2 - a)^2 \geq 0$$

è anch'essa verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza valida per $x = \pm\sqrt{a}$. Dunque $D = \mathbb{R}$. Inoltre chiaramente la funzione data è pari, e basta dunque studiarla per $x \geq 0$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} b \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right) = b \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}b,$$

e dunque la retta di equazione $y = b\pi/4$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre ovviamente il grafico della funzione non possiede asintoti verticali né obliqui.
La derivata è, per $x \neq \pm\sqrt{a}$ (punti in cui l'argomento dell'arcoseno vale 1, e non è quindi garantita la derivabilità di f),

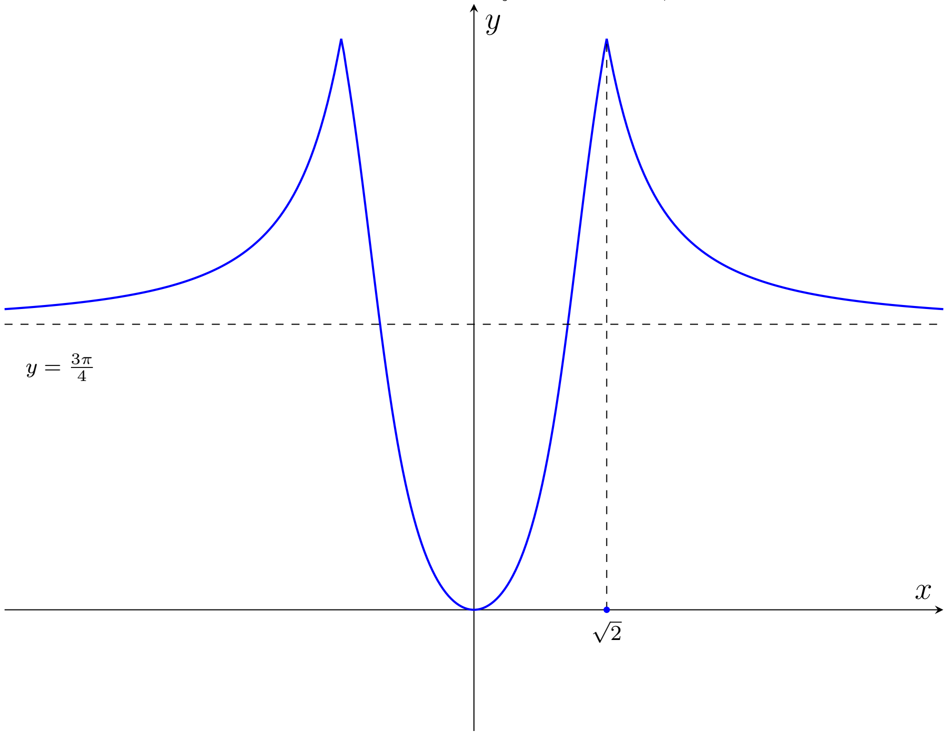
$$\begin{aligned} f'(x) &= b\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}} \frac{2x\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} - x^2\frac{4x^3 - 2ax}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\ &= b\frac{1}{\sqrt{x^4 - 2ax^2 + a^2}} \frac{2x(2x^4 - 2ax^2 + a^2) - 4x^5 + 2ax^3}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\ &= 2ab\frac{x(a - x^2)}{|x^2 - a|(2x^4 - 2ax^2 + a^2)}, \end{aligned}$$

e inoltre, essendo $\frac{a - x^2}{|x^2 - a|}$ l'opposto del segno di $x^2 - a$, si ha

$$\lim_{x\to\sqrt{a}^{\pm}} f'(x) = \mp\frac{2b}{\sqrt{a}},$$

e dunque i punti del grafico di ascisse $x = \pm\sqrt{a}$ sono punti angolosi.
Infine chiaramente $f'(0) = 0$, e per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $(a - x^2)$ (in quanto $ab > 0$ in tutti i casi), e dunque la funzione f è crescente in $(0, \sqrt{a})$ e decrescente in $(\sqrt{a}, +\infty)$, ed ha pertanto un minimo (assoluto) in $x = 0$ e massimi (assoluti) in $x = \pm\sqrt{a}$, nei quali $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2}b$.

Figura 1. Grafico di f con $a = 2$, $b = 3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c(\alpha-1)x}}{\big(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c\big)^{\alpha+1}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$[(a, b, c) = (5, 4, 3), (5, 3, 4), (5, -3, 4), (5, -4, 3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Ricordando che

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

si ha

$$\frac{1}{a\cosh(x) + b\sinh(x) + c} = \frac{2e^x}{(a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b)},$$

ed essendo in tutti i casi $a + b > 0, a - b > 0, c > 0$, la funzione integranda è continua in $\mathbb{R}$, e bisogna dunque studiarne l'integrabilità impropria solo per $x \to \pm\infty$. Essendo allora $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$, $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^{\alpha+1}} \sim \frac{2^{\alpha+1}}{(a+b)^{\alpha+1}} e^{(c(\alpha-1)-(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha - 1) - (\alpha + 1)) < 0$, ovvero $\alpha < \frac{c+1}{c-1}$. Analogamente per $x \to -\infty$ si ha $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^{-x}$, $\sinh x \sim -\frac{1}{2}e^{-x}$ e pertanto

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^{\alpha}} \sim \frac{2^{\alpha+1}}{(a-b)^{\alpha+1}} e^{(c(\alpha-1)+(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha - 1) + (\alpha + 1)) > 0$, ovvero $\alpha > \frac{c-1}{c+1}$. L'integrale converge dunque per $\frac{c-1}{c+1} < \alpha < \frac{c+1}{c-1}$.

Per $\alpha = 1$, con il cambio di variabile $t = e^x$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{2x}}{((a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b))^2} dx \\
&= \lim_{\omega' \to +\infty} \int_{-\omega'}^{+\omega'} \frac{4e^{2x}}{((a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b))^2} dx \\
&= \lim_{\omega \to +\infty} 4 \int_0^{\omega} \frac{t}{((a+b)t^2 + 2ct + (a-b))^2} dt,
\end{aligned}$$

ed essendo in tutti i casi considerati $c^2 = a^2 - b^2$,

$$(a+b)t^2 + 2ct + (a-b) = (a+b)\left(t^2 + \frac{2c}{a+b}t + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = (a+b)\left(t + \frac{c}{a+b}\right)^2,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
4\int \frac{t}{((a+b)t^2+2ct+(a-b))^2}dt &= \frac{4}{(a+b)^2}\int \frac{t}{(t+\frac{c}{a+b})^4}dt \\
&= \frac{4}{(a+b)^2}\int \frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^3}dt - \frac{4c}{(a+b)^3}\int \frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^4}dt \\
&= -\frac{2}{(a+b)^2}\frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^2} + \frac{4c}{3(a+b)^3}\frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^3} + k.
\end{aligned}$$

Si conclude dunque che l'integrale richiesto vale

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left[-\frac{2}{(a+b)^2}\frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^2} + \frac{4c}{3(a+b)^3}\frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^3}\right]_0^{\omega} = \frac{2}{c^2} - \frac{4}{3c^2} = \frac{2}{3c^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = Ax - Be^x.$$

$[(A, B) = (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 3)]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del II ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione omogenea associata è $y'' - 4y' + 3y = 0$, il cui polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ ha radici $\lambda_{1,2} = 1, 3$ e dunque ha integrale generale $y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$.
Il termine noto è della forma $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, $g_1(x) = Ax$, $g_2(x) = -Be^x$, e le corrispondenti soluzioni particolari $y_{p,1}$, $y_{p,2}$ si possono ottenere tramite il metodo di somiglianza. Si ha allora

$$y_{p,1}(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad y'_{p,1}(x) = a \quad \Rightarrow \quad y''_{p,1}(x) = 0,$$

e dunque

$$y''_{p,1} - 4y'_{p,1} + 3y_{p,1} = -4 + 3ax + 3b = x \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{A}{3},\ b = \tfrac{4A}{9},$$

da cui $y_{p,1}(x) = \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9}$. Analogamente, essendo $\lambda_1 = 1$ radice semplice del polinomio caratteristico, si avrà

$$y_{p,2}(x) = cxe^x \quad \Rightarrow \quad y'_{p,2}(x) = c(1+x)e^x \quad \Rightarrow \quad y''_{p,2}(x) = c(2+x)e^x,$$

da cui

$$y''_{p,2} - 4y'_{p,2} + 3y_{p,2} = (c(2+x) - 4c(1+x) + 3cx)e^x = -Be^x \quad \Leftrightarrow \quad c = \tfrac{B}{2}$$

e quindi $y_{p,2}(x) = \frac{B}{2}xe^x$.
Si conclude che la soluzione generale dell'equazione considerata è

$$y(x) = y_o(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \tfrac{A}{3}x + \tfrac{4A}{9} + \tfrac{B}{2}xe^x.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\frac{z+2}{|z|} = \frac{\mathrm{i}}{a}.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: L'equazione non è definita per $z = 0$. Essendo dunque $z \neq 0$, posto $z = x + iy$ si ha che l'equazione data equivale a

$$z + 2 = \frac{i}{a}|z| \;\Leftrightarrow\; x + 2 + iy = \frac{i}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{4 + y^2} \end{cases}$$

ovvero, tenendo conto che la seconda equazione implica $y > 0$,

$$x = -2, \quad y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Pertanto si ottiene un'unica soluzione $z = -2 + \frac{2i}{\sqrt{a^2-1}}$.