Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta settembre 2022 – I appello

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}}\right)(n+a\log^3 n)^2.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

<u>*Svolgimento:*</u>
Notiamo che

$$(n+a\log^3 n)^2 = n^2\left(1+\frac{a\log^3 n}{n}\right)^2 = n^2(1+o(1)) \quad \text{per } n\to\infty,$$

pertanto sarà sufficiente sviluppare l'altro fattore fino all'ordine 2. Ora

$$\cos\sqrt{\frac{a}{n}} = 1-\frac{a}{2n}+\frac{a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}} &= \frac{1}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}}\\ &= \left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{1}{2}(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{3}{8}(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2})^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1-\frac{a}{2n}+\left(\frac{3a^2}{8}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}} = \left(\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e, in conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+an+1}}-\cos\sqrt{\frac{a}{n}}\right)(n+a\log^3 n)^2 = \frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln|ax| - 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:
Dominio: Poiché $\log|ax| = 1$ se e solo se $|ax| = e$, cioè se e solo se $x = \pm e/a$ ($a > 0$ in tutti i casi), il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm e/a\}$. Inoltre chiaramente f è pari, quindi d'ora in poi assumeremo $x > 0$.
Limiti di frontiera: Poiché $\log(ax) > 1$ se e solo se $x > e/a$ e il numeratore di f è sempre non negativo, si ha

$$f(x) \to +\infty \quad \text{per } x \to \left(\frac{e}{a}\right)^+,$$
$$f(x) \to -\infty \quad \text{per } x \to \left(\frac{e}{a}\right)^-,$$

e pertanto f ha un asintoto verticale in $x = e/a$ (e per simmentria uno in $x = -e/a$). Inoltre, poiché, per il confronto di infiniti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot x = +\infty,$$

la funzione non ha asintoti orizzontali né obliqui. Essendo infine chiaramente

$$f(x) \to 0 \quad \text{per } x \to 0^+,$$

il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Derivata: La funzione è derivabile per ogni $x > 0$, $x \neq e/a$, e

$$f'(x) = \frac{x(2\ln(ax) - 3)}{(\ln(ax) - 1)^2}.$$

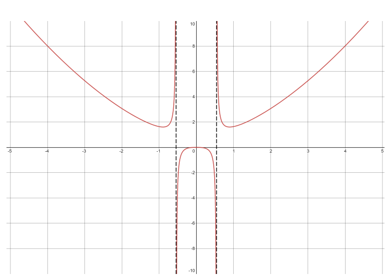
Osserviamo inoltre che, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

ponendo $f(0) = 0$ la funzione si può estendere per continuità ad una funzione derivabile con derivata nulla in $x = 0$.
Monotonia: Poiché il denominatore di f' è sempre positivo, abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff 2\log(ax) > 3 \iff x > \frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}, \quad x \neq \frac{e}{a},$$

quindi f è decrescente in $(0, e/a)$ e in $(e/a, e^{3/2}/a)$, e crescente in $(e^{3/2}/a, +\infty)$, e i punti $x = \pm\frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}$ sono di minimo locale (mentre $x = 0$ sarebbe un punto di massimo locale per la funzione estesa).



Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + a}{e^{2x} + 1}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: La funzione integranda è continua e positiva per ogni $x \geq 0$, e pertanto l'integrale è improprio soltanto a causa dell'estremo a $+\infty$. Poiché allora per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{e^{\alpha x} + a}{e^{2x} + 1} \sim \begin{cases} e^{(\alpha-2)x} & \text{se } \alpha > 0, \\ (1+a)e^{-2x} & \text{se } \alpha = 0, \\ ae^{-2x} & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.
Per calcolare l'integrale consideriamo il cambio di variabile $y = e^x$, che dà $dx = dy/y$. Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x + a}{e^{2x} + 1}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{y + a}{y(y^2+1)}\, dy,$$

e si ha la scomposizione in fratti semplici

$$\frac{y + a}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{By + C}{y^2 + 1}.$$

Moltiplicando ambo i membri per y e ponendo $y = 0$ si trova allora $A = a$, mentre moltiplicando per y^2+1 e ponendo $y = i$ si trova $iB + C = \frac{i+a}{i} = 1 - ia$, cioè $B = -a$ e $C = 1$. Dunque l'integrale richiesto è

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{y + a}{y(y^2+1)}\, dy &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - ay}{y^2 + 1}\, dy + \int_1^{+\infty} \frac{a}{y}\, dy \\ &= \Big[\arctan(y) - \frac{a}{2}\ln(1 + y^2) + a\ln(y)\Big]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + a \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\right) + \frac{a}{2}\ln(2) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' \sin x + y \cos x = e^x \\ y(a) = 0 \end{cases} .$$

$[a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi]$

Svolgimento: L'equazione data è lineare del primo ordine non omogenea, e per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, è equivalente all'equazione in forma normale

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x} y + \frac{e^x}{\sin x},$$

il cui integrale generale

$$y(x) = e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} \left[K + \int e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} \frac{e^x}{\sin x} \, dx \right], \quad K \in \mathbb{R}.$$

Essendo allora la condizione iniziale imposta in $x = a \in (0, \pi)$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione I sarà contenuto in $(0, \pi)$, e poiché $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$ si avrà, per ogni $x \in I$,

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x| = \log(\sin x),$$

La soluzione generale è dunque

$$y(x) = e^{-\log(\sin x)} \left[K + \int e^{\log(\sin x)} \frac{e^x}{\sin x} \, dx \right] = \frac{1}{\sin x} \left[K + \int e^x \, dx \right] = \frac{e^x + K}{\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo che l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{e^x - e^a}{\sin(x)}, \quad x \in (0, \pi).$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \quad \Big[1 - 2z - z|z| = 0, \quad z|z| - 2z - 2 = 0, \quad z|z| - 2 + 2z = 0\Big].$$

Svolgimento:
Risolviamo la prima versione. Sia $z = x + iy$, allora

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \iff (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} - 2(x+iy) - 1 = 0 \iff \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 1 & = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y & = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema è verificata solo se

$$y = 0, \qquad \text{o} \qquad \sqrt{x^2+y^2} = 2.$$

Notiamo che $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ non è ammissibile perché in contraddizione con la prima equazione. Pertanto $y = 0$. La prima equazione diventa allora $x|x| - 2x - 1 = 0$.
Consideriamo il caso $x < 0$. La parte reale x verifica

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1.$$

Nel caso $x > 0$ abbiamo

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Notiamo che $1 - \sqrt{2} < 0$ e, pertanto, non può essere soluzione.
Le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z|z| - 2z - 1 = 0$ sono dunque

$$z = -1 \qquad \text{e} \qquad z = 1 + \sqrt{2}.$$

Le altre versioni si trattano in modo del tutto simile.