Università di Roma "Tor Vergata – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta gennaio 2022 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

A/B/C/D

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a}\right).$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Tenendo conto dello sviluppo, per $x \to 0$,

$$\operatorname{sen} x = x + o(x),$$

si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}(2\pi\sqrt{n^2+a}) &= \lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}(2\pi\sqrt{n^2+a} - 2\pi\sqrt{n^2}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}\left(2\pi(\sqrt{n^2+a}-\sqrt{n^2})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\cancel{n^2}+a-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+a}+\sqrt{n^2}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2+a}+\sqrt{n^2}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\frac{2\pi a}{\sqrt{1+\frac{a}{n^2}}+1} + \frac{o\left(1/n\right)}{(1/n)}\right] \\
&= \pi a
\end{aligned}$$

Osservazione: nella penultima uguaglianza si è usato

$$o\left(\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2+a}+\sqrt{n^2}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$\sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (5, 4, 3, 2)]$

<u>`Dominio, segno, intersezione con gli assi`</u>:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) > 0 \quad \text{per } x > a, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = \pm a, \qquad f(0) = -a.$$

<u>`Asintoti`</u>: c'è uno stesso asintoto obliquo a $\pm\infty$ rappresentato da

$$y = mx + q, \qquad \text{con } m = 1 \quad \text{e } q = \frac{a}{3}.$$

Infatti:

$$m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2}}{x} = 1;$$

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} - 1\right] \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1-ay)(1+ay)^2} - 1}{y} \\
&\overset{H}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1}{3[(1-ay)(1+ay)^2]^{2/3}} \cdot [-a(1+ay)^2 + 2a(1+ay)(1-ay)] \\
&= \frac{a}{3}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che intersecando la funzione con il suo asintoto si trova un solo punto di intersezione, di ascissa $-\frac{7}{9}a$.

<u>`Derivata`</u>:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{3x-a}{(x-a)^{2/3}(x+a)^{1/3}} \qquad \text{per } x \neq \pm a.$$

Poiché

$$\lim_{x\to -a^\pm} f'(x) = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to a^\pm} f'(x) = +\infty,$$

possiamo dedurre dal teorema di de l'Hôpital che f non è derivabile in $\pm a$, che in $-a$ c'è una cuspide e in a c'è un punto a tangente verticale.

Inoltre

$$f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \big((-\infty, -a) \cup (a/3, +\infty)\big) \setminus \{a\},$$

$$\text{quindi } f \text{ è crescente in } (-\infty, -a) \text{ e in } (a/3, +\infty)\,;$$

$$f'(x) < 0, \text{ quindi } f \text{ è decrescente in } (-a, a/3);$$

$$f'(x) = 0, \text{ quindi un punto stazionario, per } x = \frac{a}{3}.$$

Possiamo dedurre allora che $x_m := \frac{a}{3}$ è un punto di minimo relativo. Osserviamo che x_m non è un punto di minimo assoluto perché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

<u>`Grafico`</u>:

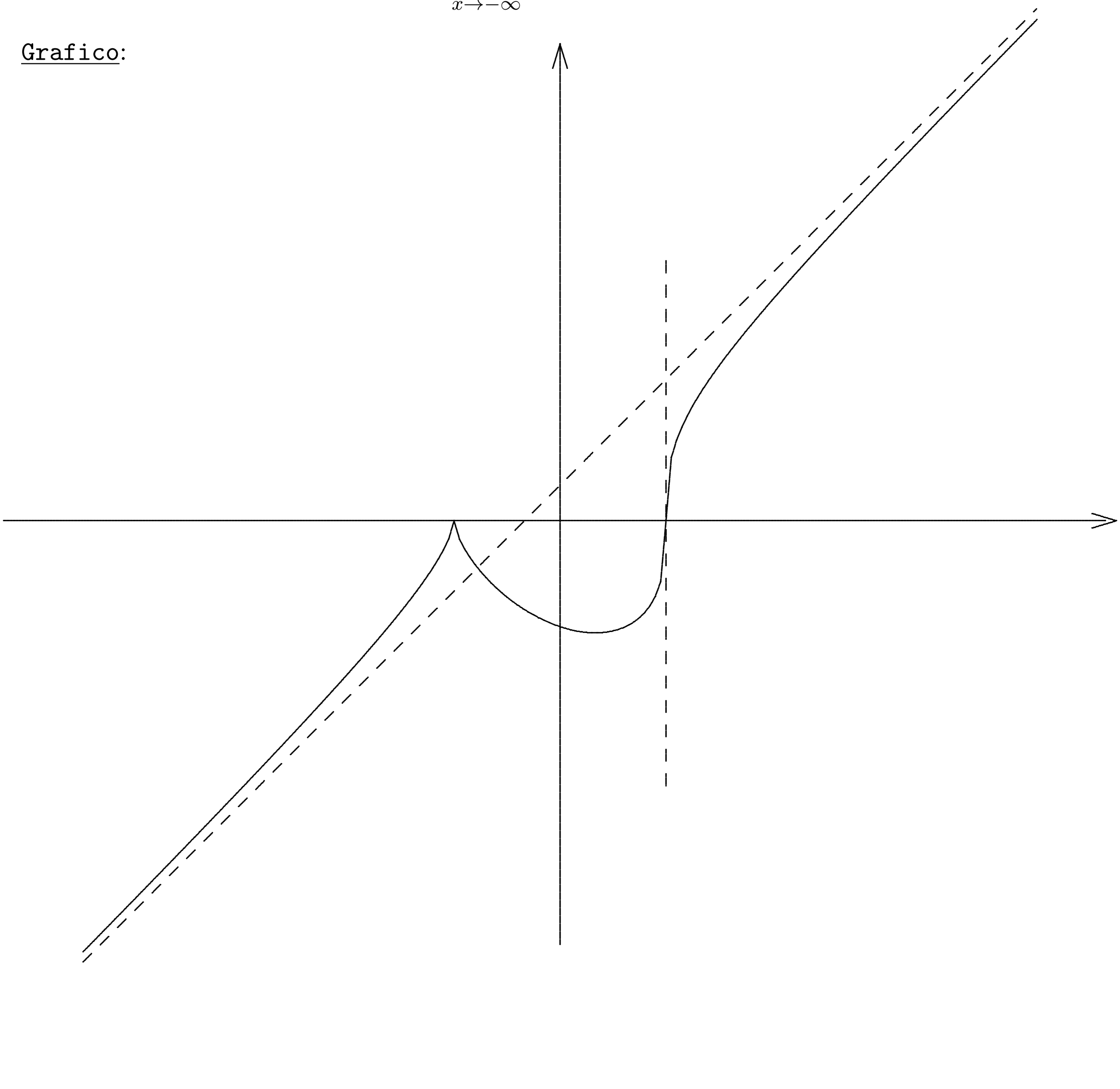

Figura 1: Tratteggiati l'asintoto obliquo e la tangente nel punto di ascissa $x = a$

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \left|\frac{\sin x - x}{\sqrt{1+x^2}-1}\right|^\alpha (x+a)\log\left(\frac{x}{a-x}\right)dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>`Integrabilità in (un intorno di) 0`</u>: Detta f_α la funzione integranda, ed osservando che

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -\frac{x^3}{6}\,\frac{2}{x^2}\,\frac{1+o(x^2)}{1+o(x)} = -\frac{1}{3}x\big(1+o(x)\big) = -\frac{1}{3}x + o(x)$$

risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\left(\frac{1}{3}x\right)^\alpha \log x} = a > 0.$$

Per confronto asintotico, abbiamo allora che l'integrabilità in 0 della funzione f_α equivale all'integrabilità in 0 di $\left(\frac{2}{3}x\right)^\alpha \log x$, che è integrabile se e solo se $\alpha > -1$.

<u>`Integrabilità in (un intorno di) a`</u>: Siccome

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f_\alpha(x)}{\log\left(\frac{1}{a-x}\right)} = \left(\frac{a - \operatorname{sen} a}{\sqrt{1+a^2}-1}\right)\cdot(2a)\cdot 1 > 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e poiché

$$\int_0^a \log\left(\frac{1}{a-x}\right)dx = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\log y\,dy \quad \text{è un valore finito,}$$

possiamo concludere che f_α è integrabile in un intorno di a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Concludendo, **l'integrale proposto è convergente se e solo se** $\alpha > -1$.

<u>`Calcolo per` $\alpha = 0$</u>:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a (x+a)\log\frac{x}{a-x}\,dx \\
&= \lim_{c\to 0^+}\int_c^a (x+a)\log x\,dx - \lim_{c\to a^-}\int_0^c (x+a)\log(a-x)\,dx \\
&= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{2}x^2 + ax\right)\log x - \frac{1}{4}x^2 - ax\right]_c^a \\
&\quad - \lim_{c\to a^-}\left[\left(-\frac{1}{2}c^2 - ac + \frac{3}{2}a^2\right)\log(a-c) + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2} + 3ac\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}a^2\log a - \frac{5}{4}a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2\log a \\
&= \frac{1}{2}a^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$(x+a)^2\Big(\log(1+\sin^2 x) - \sin\left(x^2\right)\Big).$$

[$a = 2, -2, 3, -3$]

Risulta

- $\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^5)$
- $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$
- $(\operatorname{sen} x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$
- $\log(1+\operatorname{sen}^2 x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)$

  $= x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^5)$
- $\log(1+\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x^2 = \cancel{x^2} - \frac{5}{6}x^4 - \cancel{x^2} + o(x^5) = -\frac{5}{6}x^4 + o(x^5).$

Nella penultima relazione abbiamo usato la proprietà

$$\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^3 = x^6\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^3 = o(x^5).$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned}(x+a)^2\left[\log(1+\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x^2\right] &= (a^2 + 2ax + x^2)\left(-\frac{5}{6}x^4 + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{5}{6}a^2x^4 - \frac{5}{3}ax^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^2 + \mathrm{i}\bar{z} = 1 \quad \left[\bar{z}^2 + \mathrm{i}z = 1, \quad \mathrm{i}z^2 - \bar{z} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}\bar{z}^2 - z = \mathrm{i}\right].$$

Risolviamo l'equazione $z^2 + i\bar{z} = 1$. Gli altri testi proposti si svolgono in modo analogo.

Scritto $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i, \qquad i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai.$$

Quindi l'equazione proposta è verificata se

$$(a^2 - b^2) + (2ab)i + b + ai = 1,$$

ovvero, eguagliando parti reali e parti immaginarie dell'equazione, quando è verificato il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ 2ab + a = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $a = 0$ o per $b = -\frac{1}{2}$.
Se $a = 0$ la prima equazione diventa $b^2 - b + 1 = 0$, che *non* ha soluzioni reali (N.B. $b \in \mathbb{R}$).
Se $b = -\frac{1}{2}$ la prima equazione diventa $a^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, che ha soluzioni $a = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Le soluzioni del problema proposto sono allora:

$$z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i.$$