

**Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta febbraio 2022 – I turno**

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{ax} + b + 2x \log |x| - x \log(x^2 + bx - 1)) \sqrt{cx^2 - x \sin x}.$$

$$[(a, b, c) = (3, -1, 9), (5, 1, 4), (2, -2, 4), (4, 2, 9)]$$

Svolgimento: Studiamo lo sviluppo di Taylor dei termini nel limite. Per i termini che contengono il logaritmo abbiamo

$$\begin{aligned} 2x \log |x| - x \log(x^2 + bx - 1) &= -x \log \left(\frac{x^2 + bx - 1}{x^2} \right) \\ &= -x \log \left(1 + \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= -x \left(\left(\frac{b}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x} - \frac{1}{x^2} \right)^2 + o \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= -b + \frac{1}{x} + \frac{b^2}{2x} + o \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Per il termine con la radice si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{cx^2 - x \sin(x)} &= \sqrt{c}|x| \sqrt{1 - \frac{\sin(x)}{x}} \\ &= -\sqrt{cx}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (e^{ax} + b + 2x \log |x| - x \log(x^2 + bx - 1)) \sqrt{cx^2 - x \sin x} &= \left(e^{ax} + \frac{1}{x} + \frac{b^2}{2x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right) (-\sqrt{cx}(1 + o(1))) \\ &= -e^{ax} \sqrt{cx} - \left(1 + \frac{b^2}{2} \right) \sqrt{c} + o(1), \end{aligned}$$

Poiché, per $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{ax} = 0,$$

il risultato del limite è

$$- \left(1 + \frac{b^2}{2} \right) \sqrt{c}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = 2, -2, 1, -1]$$

Svolgimento:

Dominio: La funzione è definita fintanto che $e^{ax} - 2 \neq 0$. Pertanto il dominio D è

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\ln 2}{a} \right\}.$$

Per semplicità sia $b = \frac{\ln 2}{a}$.

Limiti di frontiera: Consideriamo il caso $a > 0$, i risultati per il caso $a < 0$ sono indicati tra parentesi. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = -\infty, \quad (+\infty \text{ per } a < 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = +\infty, \quad (-\infty \text{ per } a < 0)$$

pertanto la funzione ha un asintoto verticale in b .

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = -\frac{1}{2}, \quad (0 \text{ per } a < 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = 0, \quad \left(-\frac{1}{2} \text{ per } a < 0\right)$$

pertanto $y = -1/2$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$ per $a < 0$) e $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x \rightarrow +\infty$. ($-\infty$ per $a < 0$)

Derivata: La funzione è derivabile in $D \setminus \{0\}$.

Per $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{|a|e^{2ax}}{2(e^{ax} - 2)^2 \sqrt{|e^{ax} - 1|}},$$

e per $x < 0$

$$f'(x) = \frac{|a|e^{2ax}}{2(e^{ax} - 2)^2 \sqrt{|e^{ax} - 1|}}.$$

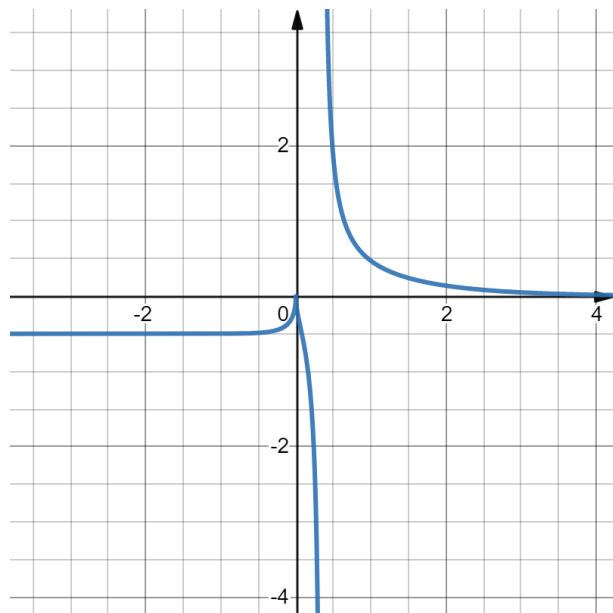
Abbiamo che f è monotona crescente per $x < 0$ e monotona decrescente per $x > 0$.

Pertanto 0 è un *punto di massimo* relativo con $f(0) = 0$.

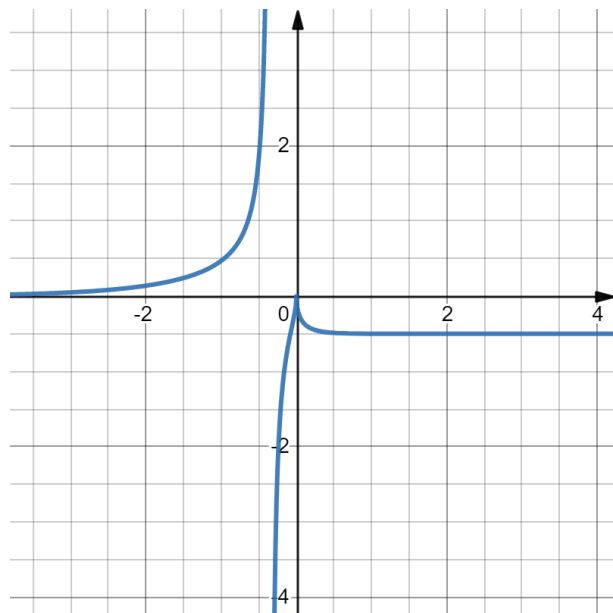
Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty,$$

è una cuspide.



(A) Grafico della funzione f con $a = 2$.



(B) Grafico della funzione f con $a = -2$.

Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{2a} \frac{\log^\alpha(1-a+x)}{x^{1+\alpha}} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Integrale improprio per l'estremo in a . La funzione integranda è di segno costante per $x > a$ si può quindi usare un criterio di equivalenza

$$\begin{aligned} \frac{\log^\alpha(1-a+x)}{x^{1+\alpha}} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} &\sim_a \frac{\sqrt{2a} \log^\alpha(1-(x-a))}{a^{1+\alpha} \sqrt{x-a}} \\ &\sim_a \frac{\sqrt{2}}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} \frac{(x-a)^\alpha}{\sqrt{x-a}} = \frac{\sqrt{2}}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} (x-a)^{\alpha-1/2} \end{aligned}$$

Ora l'integrale

$$\int_a^{2a} (x-a)^{\alpha-1/2} dx$$

è un integrale improprio che converge se e solo se $\alpha - 1/2 > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$. Consideriamo il cambio di variabile

$$t = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}},$$

pertanto avremo

$$x = a \frac{1+t^2}{t^2-1} \quad \text{e} \quad dx = -\frac{4at}{(t^2-1)^2} dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx &= \lim_{\omega \rightarrow a^+} \int_\omega^{2a} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow a^+} 4 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{\omega+a}{\omega-a}}} \frac{t^2}{t^4-1} dt = \left(\gamma := \sqrt{\frac{\omega+a}{\omega-a}} \rightarrow +\infty \text{ per } \omega \rightarrow a^+ \right) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{3}}^\gamma \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt + 2 \int_{\sqrt{3}}^\gamma \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + 2 \arctan t \right]_{\sqrt{3}}^\gamma \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right) + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x \log x} + \frac{a}{x} \\ y(e) = a \end{cases}.$$

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione ordinaria lineare del primo ordine non omogenea, definita per $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Poiché però la condizione iniziale è imposta in $x = e \in (1, +\infty)$, anche la soluzione del problema di Cauchy sarà definita per $x \in (1, +\infty)$. In base a questo si ha dunque

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log |\log x| + \text{cost} = \log(\log x) + \text{cost}.$$

Pertanto la soluzione sarà della forma

$$y(x) = \log(x) \left(C + a \int \frac{dx}{x \log(x)} \right) = \log(x) (C + a \log(\log x)).$$

La costante C è data dalla condizione iniziale $y(e) = a$ che implica $C = a$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy considerato è

$$y(x) = a \log(x)(1 + \log(\log x)), \quad x \in (1, +\infty).$$

Esercizio 5 [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm 1$ per la seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2} \sin(\pi x), \quad \left[f(x) = e^{-x^2} \sin(\pi x) \right].$$

Svolgimento: Consideriamo il primo caso: $f(x) = e^{x^2} \sin(\pi x)$ e $x_0 = 1$, gli altri casi si trattano in maniera simile.

Notiamo che

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(x-1) + \pi) = -\sin(\pi(x-1)),$$

pertanto

$$\sin(\pi x) = -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^4).$$

Quindi sarà sufficiente sviluppare e^{x^2} fino all'ordine 3. Ora

$$x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

e

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e^{1+2(x-1)+(x-1)^2} \\ &= e e^{2(x-1)} e^{(x-1)^2} \\ &= e \left(1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \right) (1 + (x-1)^2 + o((x-1)^3)) \\ &= e \left(1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{10}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \right). \end{aligned}$$

Moltiplicando i due fattori abbiamo

$$e^{x^2} \sin(\pi x) = -e\pi(x-1) - 2e\pi(x-1)^2 + \left(-3e\pi + \frac{\pi^3}{6}e \right) (x-1)^3 + \left(-\frac{10}{3}e\pi + \frac{\pi^3}{3}e \right) (x-1)^4 + o((x-1)^4).$$