Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta febbraio 2022 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+ax^2)-(1+ax)^{\sin x}+1}{\sqrt{1+2x}-\cos x-x}.$$

$[a=2,-2,3,-3]$

Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+o(t^3),\quad \cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3),\quad \text{per } t\to 0,$$

per il denominatore si trova

$$\sqrt{1+2x}-\cos x-x=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-1+\frac{x^2}{2}-x+o(x^3)=\frac{x^3}{2}+o(x^3),\quad \text{per } x\to 0.$$

Inoltre, dagli sviluppi

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad \sin t=t+o(t^2),\quad e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad \text{per } t\to 0,$$

si ottiene

$$\log(1+ax^2)=ax^2+o(x^3),\quad \text{per } x\to 0,$$

$$\begin{aligned}(1+ax)^{\sin x} &= e^{\sin x\log(1+ax)}=e^{x(ax-\frac{a^2x^2}{2})+o(x^3)}\\ &= 1+x(ax-\frac{a^2x^2}{2})+\frac{x^2}{2}(ax-\frac{a^2x^2}{2})^2+o(x^3)\\ &= 1+ax^2-\frac{a^2}{2}x^3+o(x^3)\quad \text{per } x\to 0.\end{aligned}$$

Quindi per il numeratore si trova

$$\log(1+ax^2)-(1+ax)^{\sin x}+1=\frac{a^2}{2}x^3+o(x^3)\quad \text{per } x\to 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+ax^2)-(1+ax)^{\sin x}+1}{\sqrt{1+2x}-\cos x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^2}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=a^2=\begin{cases}4 & \text{per } a=\pm 2\\ 9 & \text{per } a=\pm 3\end{cases}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$\log\left(\frac{e^{2x}+a^2}{e^x+a}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Soluzione. Indichiamo con f la funzione da studiare. In tutti i casi $a \geq 2$ e dunque, in particolare, l'argomento del logaritmo è sempre positivo. Di conseguenza il dominio della funzione è $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. Si ha $f(0) = \log\left(\frac{1+a^2}{1+a}\right)$. Inoltre

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}+a^2}{e^x+a} = 1$$

e

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}+a^2}{e^x+a} > 1\,.$$

Ponendo $t = e^x$ siamo ricondotti a cercare le soluzioni positive dell'equazione

$$t^2 + a^2 = t + a\,.$$

Il discriminante di questa equazione di secondo grado è dato da $\Delta = 1 - 4(a^2 - a)$ Ricordando che $a \geq 2$ si trova che $a^2 - a = a(a-1) \geq 2$ e quindi che $\Delta \leq -7 < 0$. Di conseguenza l'equazione non ha soluzioni e $t^2 + a^2 > t + a$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log a.$$

Quindi la retta di equazione $y = \log a$ è una asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.
Si ha inoltre

$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}+a^2}{e^x+a}\right) = \log\left(\frac{e^{2x}+a^2}{e^{2x}+ae^x}\,e^x\right) = x + \log\left(\frac{e^{2x}+a^2}{e^{2x}+ae^x}\right) = x + o(1)\,.$$

Quindi la retta di equazione $y = x$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.

Passiamo ora allo studio della derivabilità, degli intervalli di monotonia e degli eventuali estremi locali. È evidente che la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio. Di conseguenza non ci sono punti di non derivabilità. La corrispondente funzione derivata

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è data da

$$f'(x) = \frac{e^x+a}{e^{2x}+a^2}\frac{d}{dx}\frac{e^{2x}+a^2}{e^x+a} = \frac{e^x(e^{2x}+2ae^x-a^2)}{(e^{2x}+a^2)(e^x+a)}.$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 2ae^x - a^2 = 0$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 2ae^x - a^2 > 0\,.$$

Ponendo $t = e^x$ siamo ricondotti a cercare le soluzioni positive dell'equazione

$$t^2 + 2at - a^2 = 0\,.$$

Le due soluzioni dell'equazione sono $a(-1 \pm \sqrt{2})$ quindi l'unica soluzione positiva è $a(\sqrt{2} - 1)$. Di conseguenza

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log\left(a(\sqrt{2}-1)\right)$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \log\left(a(\sqrt{2}-1)\right)$$

Quindi

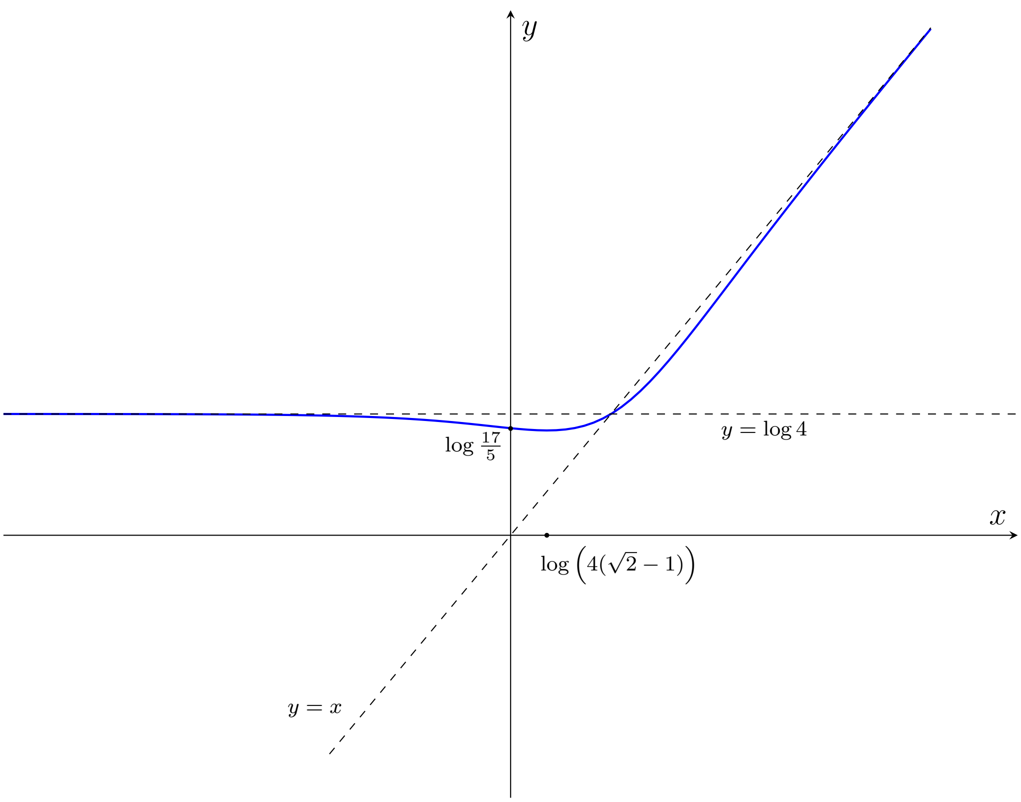
$$f \text{ è strettamente decrescente in } \left(-\infty, \log\left(a(\sqrt{2}-1)\right)\right)$$

e

$$f \text{ è strettamente crescente in } \left(\log\left(a(\sqrt{2}-1)\right), +\infty\right).$$

$\log\left(a(\sqrt{2}-1)\right)$ è un punto di minimo globale.

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $a = 4$.



Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|}{x}}}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}(x+a)^2}\,dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Soluzione. Si noti che in tutti i casi $a > 0$ e di conseguenza la funzione integranda è definita e continua in $(0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{|\alpha|}{x}}}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}(x+a)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{t|\alpha|}(\frac{1}{t}+a)^2} = 0$$

(a es. per la gerarchia degli infiniti). Quindi la funzione integranda si estende a una funzione continua in $[0, +\infty)$ ed è sufficiente controllare "l'integrabilità a $+\infty$ ". Trattandosi di una funzione non negativa è possibile utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{e^{-\frac{|\alpha|}{x}}}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}(x+a)^2} \sim \frac{1}{x^{2\alpha+\frac{5}{2}}} \quad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Quindi l'integrale improprio è convergente se e solo se $2\alpha + \frac{5}{2} > 1$ ossia se e solo se $\alpha > -\frac{3}{4}$.

Calcoliamo ora l'integrale per $\alpha = 0$. Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{\frac{x}{a}}$ si trova

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(x+a)^2}\,dx = \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{1}{t^2+1} dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = \arctan t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt.$$

Utilizzando la relazione

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^2} = -t\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{t^2+1}$$

e integrando per parti si trova

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1} dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

da cui segue che

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + C.$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(x+a)^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} \int_0^b \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \left(\arctan b + \frac{b}{b^2+1}\right) \\
&= \frac{\pi}{2a^{\frac{3}{2}}} \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{8}} & \text{per } a = 2 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{27}} & \text{per } a = 3 \\ \frac{\pi}{16} & \text{per } a = 4 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{125}} & \text{per } a = 5 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z^3 - a|z|)(z^4 + a|a|) = 0\,.$$

[$a = 2, -2, 3, -3$]

Soluzione. Si ha

$$(z^3 - a|z|)(z^4 + a|a|) = 0 \Leftrightarrow (z^3 - a|z| = 0) \vee (z^4 + a|a| = 0).$$

Distinguiamo i casi con $a > 0$ da quelli con $a < 0$.

1.(**a > 0**) Utilizzando la rappresentazione esponenziale $z = |z|e^{i\varphi}$ l'equazione

$$z^3 - a|z| = 0$$

diventa

$$|z|^3 e^{i3\varphi} = a|z|$$

che è soddisfatta se e solo se $z = 0$ o se

$$\begin{cases} |z|^2 = a \\ e^{i3\varphi} = e^{i0} \end{cases}$$

L'equazione $e^{i3\varphi} = e^{i0}$ ha come soluzioni $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ e quindi le soluzioni di

$$z^3 - a|z| = 0$$

sono

$$0, \sqrt{a},\ -\frac{\sqrt{a}}{2} \pm i\frac{\sqrt{3a}}{2}\,.$$

Sempre utilizzando la rappresentazione esponenziale l'equazione

$$z^4 + a|a| = 0$$

che, per $a > 0$ coincide con l'equazione

$$z^4 + a^2 = 0$$

diventa

$$|z|^4 e^{i4\varphi} + a^2 = 0$$

che è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} |z|^4 = a^2 \\ e^{i4\varphi} = e^{i\pi} \end{cases}$$

ossia se e solo se $|z| = \sqrt{a}$ e $e^{i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$ e quindi le soluzioni di

$$z^4 + a|a| = 0$$

sono

$$\sqrt{\frac{a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{a}{2}},\ -\sqrt{\frac{a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

Riassumendo, per $a > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$(z^3 - a|z|)(z^4 + a|a|) = 0\,.$$

sono

$$0, \sqrt{a},\ -\frac{\sqrt{a}}{2} \pm i\frac{\sqrt{3a}}{2},\ \sqrt{\frac{a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{a}{2}},\ -\sqrt{\frac{a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

2.(**a < 0**) Utilizzando la rappresentazione esponenziale $z = |z|e^{i\varphi}$ l'equazione

$$z^3 - a|z| = 0$$

diventa

$$|z|^3 e^{i3\varphi} = a|z|$$

che è soddisfatta se e solo se $z = 0$ o se

$$\begin{cases} |z|^2 = |a| \\ e^{i3\varphi} = e^{i\pi} \end{cases}$$

L'equazione $e^{i3\varphi} = e^{i\pi}$ ha come soluzioni $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ e quindi le soluzioni di

$$z^3 - a|z| = 0$$

sono

$$0, -\sqrt{|a|},\ \frac{\sqrt{|a|}}{2} \pm i\frac{\sqrt{3|a|}}{2}\,.$$

Sempre utilizzando la rappresentazione esponenziale l'equazione

$$z^4 + a|a| = 0$$

che, per $a < 0$ coincide con l'equazione

$$z^4 - a^2 = 0$$

diventa

$$|z|^4 e^{i4\varphi} - a^2 = 0$$

che è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} |z|^4 = a^2 \\ e^{i4\varphi} = e^{i0} \end{cases}$$

ossia se e solo se $|z| = \sqrt{|a|}$ e $e^{i\varphi} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$ e quindi le soluzioni di

$$z^4 + a|a| = 0$$

sono

$$\pm\sqrt{|a|},\ \pm i\sqrt{|a|}\,.$$

Riassumendo, per $a > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$(z^3 - a|z|)(z^4 + a|a|) = 0\,.$$

sono

$$0, -\sqrt{|a|},\ \frac{\sqrt{|a|}}{2} \pm i\frac{\sqrt{3|a|}}{2}, \pm\sqrt{|a|},\ \pm i\sqrt{|a|}\,.$$

Esercizio 5 [5 punti] Determinare, se esistono, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{y}{a^2} = e^{-\frac{x}{a}} + 1$$

tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ esista finito.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea. Si noti che in tutti i casi si ha $a > 0$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - \frac{1}{a^2} = 0$$

che ha come radici $\pm\frac{1}{a}$. Di conseguenza l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Visto che 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica possiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - \frac{y}{a^2} = 1$$

della forma $y_1(x) = A$ e visto che

$$y_1''(x) - \frac{y_1(x)}{a^2} = -\frac{A}{a^2}$$

si deve porre $A = -a^2$ e quindi $y_1(x) = -a^2$.
Visto che $-\frac{1}{a}$ è soluzione dell'equazione caratteristica possiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - \frac{y}{a^2} = e^{-\frac{x}{a}}$$

della forma $y_2(x) = Bxe^{-\frac{x}{a}}$ e visto che

$$y_2''(x) - \frac{y_2(x)}{a^2} = -2\frac{B}{a}e^{-\frac{x}{a}} + \frac{B}{a^2}xe^{-\frac{x}{a}} - \frac{B}{a^2}xe^{-\frac{x}{a}} = -2\frac{B}{a}e^{-\frac{x}{a}}$$

si deve porre $B = -\frac{a}{2}$ e quindi $y_2(x) = -\frac{a}{2}xe^{-\frac{x}{a}}$. Di conseguenza, per la linearità dell'equazione,

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = -a^2 - \frac{a}{2}xe^{-\frac{x}{a}}$$

è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - \frac{y}{a^2} = e^{-\frac{x}{a}} + 1$$

il cui integrale generale è dato quindi da

$$y(x) = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}} - a^2 - \frac{a}{2}xe^{-\frac{x}{a}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Da qui si vede che se $y(x)$ è una soluzione allora

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } C_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } C_1 < 0 \\ -a^2 & \text{se } C_1 = 0. \end{cases}$$

Segue che le soluzioni con limite finito per $x \to +\infty$ sono tutte e sole quelle della forma

$$y(x) = Ce^{-\frac{x}{a}} - a^2 - \frac{a}{2}xe^{-\frac{x}{a}}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$