

ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2020-21
NOTE SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

G. MORSELLA

1. TEOREMI GENERALI

Un *sistema di equazioni differenziali del I ordine* è un sistema della forma

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \\ F_2(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \\ \vdots \\ F_n(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $F_j : (a, b) \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ aperti, $j = 1, \dots, n$, sono funzioni (scalari) continue, e $y_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset (a, b)$ intervallo, $j = 1, \dots, n$, sono funzioni (scalari) di classe C^1 . Ovviamente, definendo le funzioni vettoriali $F = (F_1, \dots, F_n) : (a, b) \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, il sistema (1.1) si riscrive molto più compattamente come

$$F(t, y, y') = 0. \quad (1.2)$$

Nel caso $n = 1$, quello cioè di una singola equazione differenziale del I ordine, è noto che genericamente la soluzione dipende da una costante di integrazione arbitraria. Analogamente, la soluzione generale di un sistema di n equazioni del primo ordine dipende da n costanti arbitrarie. Più precisamente, diremo che una funzione (vettoriale) $y : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subset (a, b)$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ aperto, è un *integrale generale* del sistema (1.2), se per ogni $t_0 \in I$ e ogni $y_0 \in A$ esiste $c_0 \in C$ tale che la funzione $t \mapsto y(t, c_0)$ è soluzione di (1.2) e soddisfa la condizione iniziale $y(t_0, c_0) = y_0$. Dunque i punti $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$ svolgono il ruolo di n costanti arbitrarie la cui scelta permette di imporre condizioni iniziali alla soluzione.

Noi considereremo pressoché esclusivamente sistemi in cui la (1.2) permette di esplicitare globalmente y' in funzione di (t, y) , come precisato nella definizione seguente.

Definizione 1.1. Il sistema (1.2) si dice *in forma normale* se $B = \mathbb{R}^n$ ed esiste $f : (a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $F(t, y, y') = y' - f(t, y)$. Pertanto un *sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale* è un sistema della forma

$$y' = f(t, y), \quad (1.3)$$

o, scritto più esplicitamente,

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Come nel caso di equazioni scalari (cioè per $n = 1$), un *problema di Cauchy* associato al sistema (1.3) consiste nel determinarne una soluzione che soddisfi una data condizione iniziale:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

dove $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in A$.

Esempi 1.2. (a) Si consideri nel caso $n = 1$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

che corrisponde alla funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t, y) = y^{1/3}$. Separando le variabili, si ottiene

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = \int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int dt = t + c,$$

e dunque un'integrale generale dell'equazione $y' = y^{1/3}$ è dato da $y(t, c) = [\frac{2}{3}(t+c)]^{3/2}$, $t+c \geq 0$. Imponendo la condizione iniziale $0 = y(0, c) = (\frac{2}{3}c)^{3/2}$ si trova $c = 0$, e dunque una soluzione del problema di Cauchy dato è $y(t) = y(t, 0) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$, definita per $t \geq 0$. D'altra parte chiaramente la funzione $\tilde{y}(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, è anche soluzione dello stesso problema di Cauchy (in quanto $\tilde{y}' = 0 = \tilde{y}^{1/3}$), e raccordando tale soluzione con una di quelle ottenute dall'integrale generale determinato sopra, si ottengono le infinite soluzioni

$$y_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -c, \\ [\frac{2}{3}(t+c)]^{3/2}, & t > -c. \end{cases}$$

per ogni $c \leq 0$.

(b) Si consideri, sempre per $n = 1$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Anche in questo caso l'equazione è a variabili separabili:

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int dt = t + c,$$

ed imponendo la condizione iniziale si trova la soluzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$ definita nell'intervallo $(-\infty, 1)$. Si vede dunque che sebbene il secondo membro dell'equazione differenziale, $f(t, y) = y^2$, sia definito per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy considerato è definita solo localmente, cioè in un intervallo strettamente contenuto in quello in cui è definita l'equazione differenziale. Ovviamente la soluzione appena trovata è definita anche in $(1, +\infty)$, ma per definizione la soluzione di un'equazione differenziale è definita in un intervallo, e d'altra parte è chiaro che il valore della soluzione in $(1, +\infty)$ non è determinato dalla condizione iniziale imposta a $t = 0$, che non fa parte di tale intervallo.

I due esempi considerati mostrano che in generale la soluzione di un problema di Cauchy non è unica, o non è definita globalmente, cioè in tutto l'intervallo (a, b) in cui è definita l'equazione differenziale. Sorge allora il problema di determinare condizioni aggiuntive sull'equazione, cioè sulla funzione f , che garantiscano l'unicità e/o l'esistenza globale delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati. A tal fine introduciamo la seguente nozione.

Definizione 1.3. La funzione $f : (a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *localmente lipschitziana* in y se per ogni compatto $K \subset (a, b) \times A$ esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

Inoltre f è detta *globalmente lipschitziana* in y se esiste $L > 0$ tale che

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in (a, b) \times A.$$

Normalmente la lipschitzianità di una funzione non si verifica usando direttamente la definizione, ma piuttosto usando la condizione, piuttosto comoda, fornita dal seguente risultato.

Proposizione 1.4. Se le derivate $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, \dots, n$, esistono e sono continue in $(a, b) \times A$ allora f è localmente lipschitziana. Se inoltre $\sup_{(t, y) \in (a, b) \times A} |\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t, y)| < +\infty$ per ogni $j, k = 1, \dots, n$, allora f è globalmente lipschitziana.

Dimostrazione. Dato un compatto $K \subset (a, b) \times A$, e dati $(t, y_1), (t, y_2) \in K$, grazie al teorema del valor medio esiste, per ogni $j = 1, \dots, n$, un punto $\bar{y}_j \in (y_1, y_2)$ (segmento aperto di estremi y_1, y_2), tale che

$$|f_j(t, y_1) - f_j(t, y_2)| = |\langle \nabla f_j(t, \bar{y}_j), y_1 - y_2 \rangle| \leq \|\nabla f_j(t, \bar{y}_j)\| \|y_1 - y_2\| \leq \max_{(t, y) \in K} \|\nabla f_j(t, y)\| \|y_1 - y_2\|,$$

dove nella prima disuguaglianza si è usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e nella seconda il teorema di Weierstrass, che garantisce l'esistenza di $\max_{(t, y) \in K} \|\nabla f_j(t, y)\|$. Pertanto

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \left[\sum_{j=1}^n |f_j(t, y_1) - f_j(t, y_2)|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{j=1}^n \max_{(t, y) \in K} \|\nabla f_j(t, y)\|^2 \right]^{1/2} \|y_1 - y_2\|,$$

e si ottiene dunque la lipschitzianità locale di f ponendo $L_K := \left[\sum_{j=1}^n \max_{(t,y) \in K} \|\nabla f_j(t,y)\|^2 \right]^{1/2}$. Analogamente se $\sup_{(t,y) \in (a,b) \times A} \left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t,y) \right| < +\infty$ per ogni $j, k = 1, \dots, n$ si ottiene la lipschitzianità globale con $L := \left[\sum_{j=1}^n \sup_{(t,y) \in (a,b) \times A} \|\nabla f_j(t,y)\|^2 \right]^{1/2}$. $\square$

Il fatto che la lipschitzianità locale, risp. globale, garantisca l'esistenza e l'unicità locale, risp. globale, delle soluzioni del problema di Cauchy (1.4) è il contenuto del seguente fondamentale risultato.

Teorema 1.5 (di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : (a,b) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora:*

- (i) *(esistenza locale) se f è localmente lipschitziana, per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esistono un intervallo $I \subset (a,b)$ tale che $t_0 \in I$, ed una funzione $y : I \rightarrow A$ soluzione del problema di Cauchy (1.4);*
- (ii) *(unicità locale) se f e y sono come in (i) e se $\tilde{y} : J \rightarrow A$ è una soluzione di (1.4), allora $y(t) = \tilde{y}(t)$ per ogni $t \in I \cap J$;*
- (iii) *(esistenza e unicità globali) se $A = \mathbb{R}^n$ e f è globalmente lipschitziana, per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esiste un'unica $y : (a,b) \rightarrow A$ soluzione di (1.4).*

Grazie all'unicità, è possibile prolungare le soluzioni locali di (1.4): se infatti $y : I \rightarrow A$ è una tale soluzione, preso $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, si può considerare la soluzione $\tilde{y} : J \rightarrow A$ del problema di Cauchy con condizione iniziale $\tilde{y}(t_1) = y(t_1)$, e per il teorema di unicità si avrà $\tilde{y}(t) = y(t)$ per ogni $t \in I \cap J$, e si ottiene dunque una soluzione definita in tutto l'intervallo $I \cup J$, possibilmente più grande dell'intervallo di partenza I . Iterando questo procedimento si ottengono le cosiddette soluzioni massimali di (1.4), come precisato dal seguente teorema.

Teorema 1.6 (di esistenza di soluzioni massimali). *Sia $f : (a,b) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana. Allora per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esiste una soluzione $y : (\alpha, \beta) \rightarrow A$ di (1.4) tale che per ogni compatto $K \subset A$:*

- (i) *se $\beta < b$, si ha $y(t) \notin K$ definitivamente per $t \rightarrow \beta^-$;*
 - (ii) *se $\alpha > a$, si ha $y(t) \notin K$ definitivamente per $t \rightarrow \alpha^+$.*
- Tale soluzione è detta soluzione massimale di (1.4).*

Dunque una soluzione massimale, se non è definita in tutto (a,b) , esce definitivamente (agli estremi del suo intervallo di definizione) dai compatti contenuti in A , il che implica che tende all'infinito, o alla frontiera di A , e dunque non è ulteriormente prolungabile usando il metodo descritto sopra. Questa proprietà delle soluzioni massimali fornisce anche un metodo a volte utile per stabilire se sono definite in tutto (a,b) senza calcolarle esplicitamente.

2. SISTEMI LINEARI

Il sistema (1.3) è detto un *sistema lineare di equazioni differenziali del primo ordine* se è della forma

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{cases}$$

dove $a_{jk}, b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $j, k = 1, \dots, n$, sono funzioni continue e limitate. Ovviamente definendo la matrice $n \times n$ dipendente da t

$$A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

e il vettore $b(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t))$, il sistema precedente si scrive in forma compatta

$$y' = A(t)y + b(t). \quad (2.1)$$

Inoltre il sistema che si ottiene nel caso particolare $b(t) = 0$,

$$y' = A(t)y, \quad (2.2)$$

è detto il *sistema lineare omogeneo* associato al sistema (2.1).

Proposizione 2.1. *Dati comunque $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

ammette un'unica soluzione globale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Indicato con $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ il secondo membro del sistema (2.1), l'asserto segue immediatamente dalla proposizione 1.4 e dal punto (iii) del teorema di esistenza e unicità, in quanto

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t, y) = a_{jk}(t)$$

è per ipotesi una funzione continua e limitata in $I \times \mathbb{R}^n$, e dunque f è globalmente lipschitziana. $\square$

Concentriamoci per il momento sul sistema omogeneo (2.2). La linearità del sistema comporta una struttura piuttosto semplice dell'insieme

$$S := \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : y \text{ è soluzione di (2.2)}\}$$

delle sue soluzioni, come mostreremo a breve. A tale scopo, premettiamo una definizione che è un caso particolare della ben nota nozione di indipendenza lineare in uno spazio vettoriale.

Definizione 2.2. Le funzioni $y_1, \dots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sono linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Teorema 2.3 (struttura dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo). *L'insieme S delle soluzioni del sistema lineare omogeneo (2.2) è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ di dimensione n .*

Dimostrazione. Siano $y, z \in S$. Allora

$$\frac{d}{dt}(y + z) = y' + z' = A(t)y + A(t)z = A(t)[y + z],$$

e dunque $y + z \in S$. Analogamente se $y \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $\alpha y \in S$. Pertanto S è un sottospazio di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Sia poi $y_j \in S$, $j = 1, \dots, n$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = e_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se allora $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$, ponendo $t = t_0$ si ha $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ e dunque, per l'indipendenza lineare di $e_1, \dots, e_n$, ne segue $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, che dimostra l'indipendenza lineare delle soluzioni $y_1, \dots, y_n \in S$. Data poi una generica soluzione $y \in S$, si potrà scrivere $y(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, e dunque y è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \end{cases}$$

di cui è soluzione anche la funzione $t \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t)$, e pertanto per l'unicità $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j$. Dunque $y_1, \dots, y_n$ è una base di S , che ha pertanto dimensione n . $\square$

Pertanto per determinare la soluzione generale di (2.2) è sufficiente determinare n sue soluzioni linearmente indipendenti: ogni altra soluzione sarà una loro combinazione lineare. Il seguente risultato permette di decidere in maniera piuttosto semplice se una famiglia (finita) di soluzioni di (2.2) è linearmente indipendente.

Proposizione 2.4. *Siano $y_1, \dots, y_p \in S$. Sono equivalenti:*

- (i) *le funzioni $y_1, \dots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti;*
- (ii) *per ogni $t \in I$ i vettori $y_1(t), \dots, y_p(t) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti;*
- (iii) *esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori $y_1(t_0), \dots, y_p(t_0) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): fissato $\bar{t} \in I$ siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(\bar{t}) = 0,$$

e si definisca $y := \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j$. Allora essendo S uno spazio vettoriale si ha $y \in S$, che sarà quindi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(\bar{t}) = 0, \end{cases}$$

che ha ovviamente la soluzione identicamente nulla, e dunque, per unicità, $y(t) = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$ che, per l'indipendenza lineare di $y_1, \dots, y_p$, implica $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Dunque $y_1(\bar{t}), \dots, y_p(\bar{t}) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti, ed essendo $\bar{t} \in I$ arbitrario otteniamo (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ovvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i): se $\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$, ponendo $t = t_0$ si ottiene ovviamente $\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t_0) = 0$, da cui, per l'indipendenza lineare di $y_1(t_0), \dots, y_p(t_0)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, e cioè l'indipendenza lineare di $y_1, \dots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Dunque per verificare se una famiglia finita di soluzioni di (2.2) è linearmente indipendente basta verificare se i loro valori in un qualunque $t_0 \in I$ sono linearmente indipendenti, e cioè che la matrice che ha per colonne tali vettori ha rango massimo. In particolare n soluzioni $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $t_0 \in I$ tale che

$$\det \begin{bmatrix} y_{11}(t_0) & \dots & y_{n1}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t_0) & \dots & y_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Per quanto riguarda il sistema non omogeneo (2.1), analogamente al caso di una singola equazione lineare, le sue soluzioni si ottengono tutte sommando una sua soluzione fissata a una qualunque soluzione del sistema omogeneo.

Teorema 2.5. Sia $y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ una soluzione del sistema lineare non omogeneo (2.1). Allora l'insieme delle soluzioni di (2.1) è

$$S + y_p = \{y + y_p : y \in S\}.$$

Dimostrazione. Se $y \in S$ si ha

$$\frac{d}{dt}(y + y_p) = y' + y_p' = A(t)y + A(t)y_p + b(t) = A(t)[y + y_p] + b(t),$$

e dunque $y + y_p$ è soluzione di (2.1). Viceversa se $\tilde{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è soluzione di (2.1), allora

$$\frac{d}{dt}(\tilde{y} - y_p) = \tilde{y}' - y_p' = A(t)\tilde{y} + b(t) - A(t)y_p - b(t) = A(t)[\tilde{y} - y_p],$$

e dunque $y := \tilde{y} - y_p \in S$, e $\tilde{y} = y + y_p \in S + y_p$. $\square$

3. SISTEMI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

È ben noto che per $n = 1$ l'integrale generale di (2.1) è dato da

$$y(t, c) = e^{\int dt A(t)} \left[c + \int dt e^{-\int dt A(t)} b(t) \right]. \quad (3.1)$$

Purtroppo se invece $n > 1$ non è disponibile una formula esplicita per la soluzione di (2.1) nel caso di una funzione matriciale $t \mapsto A(t)$ generica. È però possibile trovare una tale formula nel caso particolare di una matrice con coefficienti costanti, cioè indipendenti da t .

Considereremo dunque d'ora in poi il generico *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti*, che è il caso particolare di (2.1) in cui le funzioni $t \mapsto a_{jk}(t)$ sono identicamente costanti:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(t), \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(t), \end{cases}$$

che al solito si riscrive più compattamente in forma vettoriale

$$y' = Ay + b(t), \quad (3.2)$$

dove come nel caso generale

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t)),$$

e il cui sistema omogeneo associato è ancora

$$y' = Ay. \quad (3.3)$$

Nel caso $n = 1$, in cui la matrice A è ridotta a un numero reale, l'integrale generale di (3.3) è ovviamente dato dall'esponenziale $(t, c) \mapsto e^{tA}c$. È notevole il fatto che tale formula continua a valere anche per $n > 1$, a patto chiaramente di definire opportunamente l'esponenziale di una matrice.

A tale scopo, ricordiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $t \in \mathbb{R}$, si definisce $e^{\lambda t} := e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, da cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} &= \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + e^{\alpha t} \beta (-\sin(\beta t) + i \cos(\beta t)) \\ &= (\alpha + i\beta) e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = \lambda e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

che generalizza la regola di derivazione valida per $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cominciamo allora a considerare il caso in cui la matrice A dei coefficienti del sistema (3.3) sia diagonalizzabile.

Proposizione 3.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile, con autovalori complessi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (ripetuti secondo molteplicità), e rispettivi autovettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Definita allora la matrice invertibile*

$$C := [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

che ha gli autovettori come colonne, e posto

$$e^{tA} := C \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} C^{-1},$$

l'integrale generale del sistema (3.3) è dato da

$$y(t, c) = e^{tA}c, \quad t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Dimostrazione. È noto che, nelle ipotesi fatte,

$$A = CDC^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e pertanto se $t \mapsto y(t)$ è soluzione di (3.3), posto $z(t) := C^{-1}y(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto z(t)$ soddisfa

$$z'(t) = C^{-1}y'(t) = C^{-1}Ay(t) = DC^{-1}y(t) = Dz(t),$$

che, scritta per componenti, diventa il sistema di n equazioni (complesse) indipendenti

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t), \\ \vdots \\ z_n'(t) = \lambda_n z_n(t). \end{cases}$$

Dunque, per quanto osservato sopra, si ha $z_j(t) = e^{\lambda_j t} k_j$, $t \in \mathbb{R}$, $k_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, e di conseguenza

$$y(t) = Cz(t) = C \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} k = e^{tA}c$$

con $c := C(k_1, \dots, k_n) = y(0) \in \mathbb{R}^n$. Dunque ogni soluzione di (3.3) è della forma $y(t, c) = e^{tA}c$, e poiché chiaramente $e^{tA}e^{-tA} = \mathbb{I}$, la soluzione tale che $y(t_0) = y_0$ si ottiene per $c = e^{-t_0A}y_0$. Si conclude quindi che $(t, c) \mapsto y(t, c)$ è l'integrale generale di (3.3). $\square$

Notiamo esplicitamente il fatto che, nelle ipotesi della proposizione precedente, anche se in generale gli autovalori e gli autovettori di A possono essere complessi, l'esponenziale e^{tA} è in ogni caso una matrice reale.

La conoscenza della matrice e^{tA} consente anche di determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo (3.2).

Teorema 3.2 (metodo di variazione delle costanti). *Una soluzione particolare di (3.2) è data da*

$$y_p(t) = \int_0^t ds e^{(t-s)A} b(s), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Si potrebbe ovviamente verificare che la funzione y_p definita dalla formula dell'enunciato è una soluzione di (2.1) derivandola, ma è più istruttivo procedere al modo seguente. Osserviamo intanto che dal fatto che $y(t) = e^{tA}c$ è soluzione di (3.3) per ogni $c \in \mathbb{R}^n$ si deduce

$$\frac{d}{dt} e^{tA}c = A e^{tA}c, \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui, per l'arbitrarietà di c , $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$. Supponendo allora di avere una soluzione y_p di (3.2), si definisca $c(t) := e^{-tA}y_p(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Moltiplicando tale equazione a sinistra per e^{tA} si ottiene ovviamente $y_p(t) = e^{tA}c(t)$, e derivando rispetto a t ,

$$y_p'(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA})c(t) + e^{tA}c'(t) = A e^{tA}c(t) + e^{tA}c'(t),$$

D'altra parte essendo y_p una soluzione di (3.2) si deve avere

$$y_p'(t) = A y_p(t) + b(t) = A e^{tA}c(t) + b(t).$$

Confrontando queste due equazioni si trova $e^{tA}c'(t) = b(t)$ o, moltiplicando a sinistra per e^{-tA} , $c'(t) = e^{-tA}b(t)$, che ha la soluzione ovvia

$$c(t) = \int_0^t ds e^{-sA} b(s).$$

Ricordando allora che $y_p(t) = e^{tA}c(t)$ e osservando che $e^{tA}e^{-sA} = e^{(t-s)A}$, si ottiene la tesi. $\square$

Il nome del teorema appena dimostrato deriva dal fatto che, come visto sopra, $(t, c) \mapsto e^{tA}c$ è l'integrale generale del sistema omogeneo, e dunque il metodo consiste nel cercare una soluzione del sistema non omogeneo facendo variare, cioè dipendere da t , la costante arbitraria c dell'integrale generale.

Un modo alternativo (rispetto a quello fornito dalla proposizione 3.1) di rappresentare la soluzione, che consente di evitare il calcolo esplicito di e^{tA} , spesso un po' laborioso, si può ottenere osservando che $C^{-1}v_j = e_j$, j -esimo vettore della base canonica, e dunque

$$e^{tA}v_j = C \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} e_j = e^{\lambda_j t} C e_j = e^{\lambda_j t} v_j.$$

Essendo allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{C}^n$, ogni vettore $y_0 \in \mathbb{R}^n$ si scriverà $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ per opportuni $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, e la soluzione $t \mapsto y(t)$ di (2.2) con dato iniziale $y(0) = y_0$ sarà dunque

$$y(t) = e^{tA}y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{tA}v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{t\lambda_j} v_j, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Analogamente, per quanto riguarda la soluzione particolare (3.5), dalla decomposizione $b(s) = \sum_{j=1}^n b_j(s)v_j$, $s \in \mathbb{R}$, del termine noto di (3.2), si otterrà

$$y_p(t) = \int_0^t ds e^{(t-s)A} b(s) = \sum_{j=1}^n \int_0^t ds b_j(s) e^{(t-s)A} v_j = \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t ds b_j(s) e^{\lambda_j(t-s)} \right] v_j,$$

formula che consente di evitare il calcolo di e^{tA} . Notiamo anche che nel caso in cui ci sia un autovalore λ_j non reale, a priori il membro di destra di (3.6) contiene numeri complessi, pur dovendo essere $y(t)$

un vettore reale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Tuttavia, essendo la matrice A , e quindi il suo polinomio caratteristico, reali, essa ammetterà anche l'autovalore coniugato $\bar{\lambda}_j$, sia esso λ_{j+1} , ed anche i corrispondenti autovettori saranno l'uno il coniugato dell'altro, in quanto

$$(A - \lambda_j \mathbb{1})v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \bar{\lambda}_j \mathbb{1})\bar{v}_j = \overline{(A - \lambda_j \mathbb{1})v_j} = 0.$$

Ne segue, come illustrato dall'esempio seguente, che anche i rispettivi coefficienti α_j, α_{j+1} in (3.6) sono l'uno il coniugato dell'altro. Pertanto i corrispondenti termini della somma in (3.6) saranno

$$\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j + \alpha_{j+1} e^{t\lambda_{j+1}} v_{j+1} = \alpha_j e^{t\lambda_j} v_j + \overline{\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j} = 2\operatorname{Re} [\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j].$$

Tale fatto, insieme alle formule di Eulero

$$e^{t\lambda_j} = e^{t\operatorname{Re} \lambda_j} [\cos(t\operatorname{Im} \lambda_j) + i \sin(t\operatorname{Im} \lambda_j)]$$

permette allora di esprimere la (3.6) in termini di sole quantità reali. Si vede dunque che l'esistenza di autovalori di A non reali comporta l'apparizione nella soluzione di funzioni oscillanti (cioè trigonometriche) di t .

Esempi 3.3. (a) Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

che ha come radici (distinte) $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$, e dunque la matrice A è diagonalizzabile. L'autovettore $v_1 = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ corrispondente all'autovalore λ_1 è soluzione del sistema

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-i)x - 5y \\ x - (2+i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e dunque $v_1 = (2+i, 1)$, da cui come osservato sopra $v_2 = \bar{v}_1 = (2-i, 1)$. Si avrà pertanto $A = C \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} C^{-1}$ con C la matrice che ha come colonne i vettori v_1 e v_2 (in quest'ordine). Dunque $C^{-1} = \begin{bmatrix} -i/2 & i+1/2 \\ i/2 & -i+1/2 \end{bmatrix}$, e

$$\begin{aligned} e^{tA} &= C \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (-i + \frac{1}{2})e^{(1+i)t} + (i + \frac{1}{2})e^{(1-i)t} & (2+i)(\frac{1}{2}+i)e^{(1+i)t} + (2-i)(\frac{1}{2}-i)e^{(1-i)t} \\ -\frac{i}{2}e^{(1+i)t} + \frac{i}{2}e^{(1-i)t} & (\frac{1}{2}+i)e^{(1+i)t} + (\frac{1}{2}-i)e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \\ &= 2\operatorname{Re} \begin{bmatrix} (-i + \frac{1}{2})e^{(1+i)t} & (2+i)(\frac{1}{2}+i)e^{(1+i)t} \\ -\frac{i}{2}e^{(1+i)t} & (\frac{1}{2}+i)e^{(1+i)t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t(2\sin t + \cos t) & -5e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t(\cos t - 2\sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue, in base alla (3.4), che le soluzioni del sistema considerato sono tutte date dalla formula

$$y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t[(2c_1 - 5c_2)\sin t + c_1 \cos t] \\ e^t[(c_1 - 2c_2)\sin t + c_2 \cos t] \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, come detto, si può usare la (3.6), che fornisce

$$y(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} v_1 + \alpha_2 e^{(1-i)t} v_2.$$

Dovendo inoltre essere $y(t) \in \mathbb{R}^2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ed essendo $v_2 = \bar{v}_1$, si avrà, per $t = 0$,

$$\bar{\alpha}_1 v_2 + \bar{\alpha}_2 v_1 = \overline{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2} = \overline{y(0)} = y(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$

da cui $(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2)v_2 = (\alpha_1 - \bar{\alpha}_2)v_1$, che, per l'indipendenza lineare di v_1, v_2 , implica $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, e dunque, se $\alpha_1 = \beta + i\gamma$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = 2\operatorname{Re} [\alpha_1 e^{(1+i)t} v_1] = 2\operatorname{Re} \left[(\beta + i\gamma)e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2e^t [(2\beta - \gamma)\cos t - (\beta + 2\gamma)\sin t] \\ 2e^t (\beta \cos t - \gamma \sin t) \end{bmatrix}.$$

Si vede allora che si ritrova la soluzione calcolata precedentemente ponendo

$$\begin{cases} c_1 = 4\beta - 2\gamma, \\ c_2 = 2\beta. \end{cases}$$

(b) Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = y_2, \\ y_3' = -2y_3. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

è triangolare superiore, e ha dunque i tre autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Dunque A è diagonalizzabile. I suoi autovettori si ottengono risolvendo:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow v_1 = (1, 0, 0), \\ (A - \lambda_2 \mathbb{1})v_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y \\ 0 \\ -3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow v_2 = (1, 2, 0), \\ (A - \lambda_3 \mathbb{1})v_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 3y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow v_3 = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale del sistema considerato è dato, in base alla (3.6), da

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} v_1 + \alpha_2 e^t v_2 + \alpha_3 e^{-2t} v_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^t \\ 2\alpha_2 e^t \\ \alpha_3 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Volendo inoltre calcolare e^{tA} , definita la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si avrà

$$e^{tA} = C e^{tD} C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Un altro caso in cui è facile ottenere l'integrale generale di (3.3), pur non essendo A necessariamente diagonalizzabile, è quello in cui $A = \mu \mathbb{1} + N$ con $N \in M_n(\mathbb{R})$ matrice *nilpotente*, cioè tale che esista $p \in \mathbb{N}$ tale che $N^p = 0$. Si definisca infatti in tal caso

$$e^{tA} := e^{t\mu} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!}, \quad (3.7)$$

si avrà allora

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left[e^{t\mu} \sum_{k=0}^p \frac{t^k N^k}{k!} \right] = \mu e^{tA} + e^{t\mu} \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1} N^k}{(k-1)!} = \mu e^{tA} + e^{t\mu} N \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = A e^{tA},$$

dove nella prima uguaglianza si è usato il fatto che $N^p = 0$. Dunque posto $y(t, c) := e^{tA} c$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, si ottiene $y'(t) = A e^{tA} c = A y(t)$ e pertanto, analogamente alla proposizione 3.1, $(t, c) \mapsto y(t, c)$ è l'integrale generale di (3.3). Inoltre, per calcolare una soluzione particolare di (3.2), si può usare anche in questo caso la formula (3.5), la cui dimostrazione, data precedentemente nel caso di A diagonalizzabile, vale immutata.

Esempi di matrici nilpotenti sono forniti dalle matrici strettamente triangolari superiori (o inferiori), cioè matrici con tutti zeri sotto (o sopra) la diagonale principale, diagonale compresa. Si vede infatti facilmente per induzione che in tal caso per ogni $k = 1, \dots, n$, N^k è una matrice che ha tutti zeri sotto (o sopra) la diagonale, sulla diagonale, e anche su $k - 1$ diagonalì sopra (o sotto) quella principale, e dunque $N^n = 0$.

L'espressione (3.7) è particolarmente utile nel caso di una matrice $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ non diagonalizzabile. Infatti in tal caso A ha un solo autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1, e si può dimostrare, come vedremo a breve, che la matrice $N = A - \lambda \mathbb{1}$ è sempre nilpotente, con $N^2 = 0$, e pertanto la (3.7) diviene $e^{tA} = e^{\lambda t}(\mathbb{1} + tN)$, molto semplice da calcolare, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 3.4. Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + t, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

che ha l'unica radice $\lambda = 2$ che è pertanto un autovalore di A di molteplicità algebrica 2, ma necessariamente di molteplicità geometrica 1 (altrimenti si avrebbe $A = 2\mathbb{1}$), e pertanto A non è diagonalizzabile. Definendo allora la matrice

$$N := A - 2\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si vede facilmente che $N^2 = 0$, e dunque dalla (3.7),

$$e^{tA} = e^{2t}(\mathbb{1} + tN) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - t & -t \\ t & 1 + t \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema omogeneo associato a quello considerato è dato da

$$y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1 - t) - c_2 t \\ c_1 t + (1 + t)c_2 \end{bmatrix}.$$

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo si ottiene poi dal metodo di variazione delle costanti, teorema 3.2:

$$y_p(t) = \int_0^t ds e^{(t-s)A} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \int_0^t ds e^{-2s} \begin{bmatrix} (1 - t + s)s \\ (t - s)s \end{bmatrix}.$$

Usando allora per calcolare gli integrali le formule ricorsive

$$\int_0^t ds e^{-\alpha s} s^n = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \int_0^t ds e^{-\alpha s} s^{n-1},$$

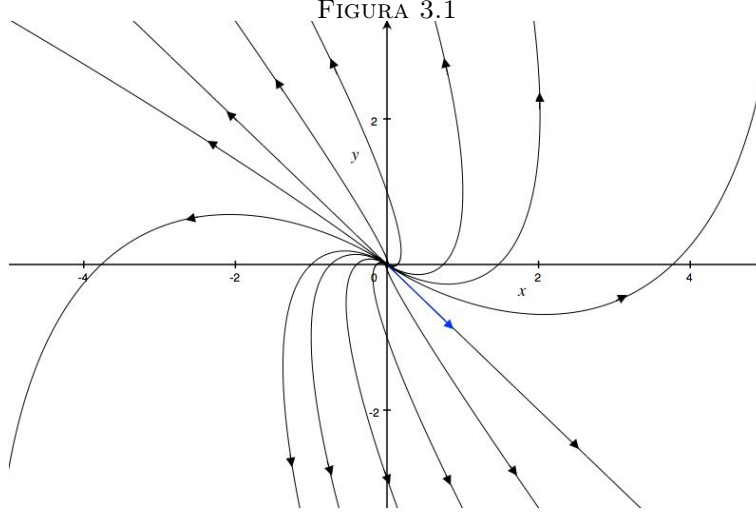
ottenute integrando per parti, si ricava

$$y_p(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (2 - t)e^{2t} + 3t - 8 \\ (t - 1)e^{2t} - 3t + 5 \end{bmatrix}.$$

Il diagramma di fase del sistema omogeneo e l'unico (a meno di costanti) autovettore di A , $v = (1, -1, 0)$, in blu, sono mostrati in fig. 3.1.

Un caso particolarmente semplice di matrice del tipo sopra considerato è quello di un *blocco elementare di Jordan* di ordine $p \in \mathbb{N}$:

$$J_p(\mu) := \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \mu & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C}$$



(tutti μ sulla diagonale principale, tutti 1 su quella sopra, e tutti 0 altrove). Si vede infatti facilmente per induzione che la matrice $N = J_p(\mu) - \mu \mathbb{1}$ (che ha tutti 1 sulla diagonale sopra a quella principale, e tutti 0 altrove) è tale che N^k ha tutti 1 sulla k -esima diagonale sopra a quella principale, e tutti zero altrove, e pertanto, dalla (3.7):

$$e^{tJ_p(\mu)} = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \dots & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & & & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \frac{t^{p-3}}{(p-3)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(tutti 1 sulla diagonale principale, tutti t sulla quella sopra, tutti $\frac{t^2}{2!}$ su quella ancora sopra, e così via).

Un modo alternativo, probabilmente più istruttivo, per verificare che $y(t, c) = e^{tJ_p(\mu)}c$ fornisce l'integrale generale del sistema omogeneo (3.3) con $A = J_p(\mu)$, parte dall'osservazione che in tal caso il sistema, scritto per componenti, diventa

$$\begin{cases} y_1' = \mu y_1 + y_2, \\ y_2' = \mu y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{p-1}' = \mu y_{p-1} + y_p, \\ y_p' = \mu y_p. \end{cases}$$

La soluzione dell'ultima equazione è dunque chiaramente $y_p(t) = e^{\mu t}c_p$ con $c_p \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Sostituendo questo nella penultima equazione si ottiene l'equazione lineare non omogenea del primo ordine $y_{p-1}' = \mu y_{p-1} + e^{\mu t}c_p$, la cui soluzione si ricava usando la (3.1): $y_{p-1}(t) = e^{\mu t}(c_{p-1} + tc_p)$, con $c_{p-1} \in \mathbb{R}$ nuova costante arbitraria. Si capisce che allora si può iterare il procedimento, sostituendo questa soluzione nell'equazione per y_{p-2} , che sarà nuovamente lineare non omogenea, con soluzione $y_{p-2}(t) = e^{\mu t}(c_{p-2} + tc_{p-1} + \frac{t^2}{2}c_p)$. Si ottiene in definitiva

$$y_{p-h}(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^h \frac{t^k}{k!} c_{p-h+k}, \quad h = 0, \dots, p-1,$$

o, facendo il cambiamento di indice $j = p - h$,

$$y_j(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{p-j} \frac{t^k}{k!} c_{j+k} = e^{\mu t} \left(c_j + t c_{j+1} + \frac{t^2}{2!} c_{j+2} + \cdots + \frac{t^{p-j}}{(p-j)!} c_p \right), \quad j = 1, \dots, p,$$

che in forma matriciale diventa appunto $y(t) = e^{tJ_p(\mu)} c$ con $e^{tJ_p(\mu)}$ data dalla (3.8).

Inoltre, se la matrice A è diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix}, \quad A_j \in M_{n_j}(\mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, r,$$

e se ognuna delle matrici A_j , $j = 1, \dots, r$, è di uno dei tipi considerati sopra, si verifica facilmente che definendo la matrice a blocchi

$$e^{tA} := \begin{bmatrix} e^{tA_1} & & 0 \\ & e^{tA_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{tA_r} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

la formula $y(t, c) = e^{tA} c$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, fornisce di nuovo l'integrale generale del sistema omogeneo (3.3), e la (3.5) una soluzione particolare del sistema non omogeneo (3.2).

Alla luce di queste ultime osservazioni (e non solo), riveste importanza fondamentale il risultato seguente.

Teorema 3.5 (forma canonica di Jordan di una matrice). *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, e siano $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ i suoi autovalori distinti, con molteplicità geometriche $m_1, \dots, m_r$ e algebriche $n_1, \dots, n_r$. Allora esiste una matrice invertibile $C \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $A = CJC^{-1}$, dove $J \in M_n(\mathbb{C})$ è diagonale a blocchi*

$$J = \begin{bmatrix} J(\mu_1) & & 0 \\ & J(\mu_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J(\mu_r) \end{bmatrix},$$

e dove, per ogni $j = 1, \dots, r$,

$$J(\mu_j) = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\mu_j) & & 0 \\ & J_{p_2}(\mu_j) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{p_{m_j}}(\mu_j) \end{bmatrix}$$

con $p_1 + \dots + p_{m_j} = n_j$, cioè $J(\mu_j)$ è diagonale a blocchi, e ha sulla diagonale principale un numero di blocchi elementari di Jordan pari alla molteplicità geometrica m_j di μ_j , la cui somma delle dimensioni è pari alla molteplicità algebrica n_j di μ_j .

La matrice J è detta la *forma canonica di Jordan* di A .

Pertanto se nelle notazioni del teorema precedente si definisce

$$e^{tA} := C e^{tJ} C^{-1},$$

dove l'esponenziale e^{tJ} si calcola usando le (3.8), (3.9), si verifica, in modo del tutto analogo a quanto fatto nella dimostrazione della proposizione 3.1 che $y(t, c) = e^{tA} c$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$ fornisce l'integrale generale del sistema omogeneo (3.3). Infatti se $t \mapsto y(t)$ è soluzione di (3.3), la funzione $z(t) := C^{-1}y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione $z' = Jz$, e dunque $z(t) = e^{tJ} k$, $k \in \mathbb{R}^n$, da cui $y(t) = C z(t) = e^{tA} c$ con $c := Ck$. Inoltre, anche in questo caso continua a valere la formula (3.5) per la soluzione particolare del sistema non omogeneo (3.2), con dimostrazione immutata.

Dunque il problema della soluzione del sistema (3.2) è ridotto a quello del calcolo della forma canonica di Jordan della matrice dei coefficienti A , e della matrice C , le cui colonne sono i cosiddetti *autovettori generalizzati* di A . Sebbene sia possibile dare un algoritmo per la determinazione di J e C , la sua descrizione nel caso generale è piuttosto complicata, e quindi ci limiteremo a fornirla nel caso di una matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$.

A tale scopo cominciamo con l'osservare che se A ha $r = 3$ autovalori distinti allora A è diagonalizzabile, e si ricade quindi nella situazione coperta dalla proposizione 3.1. Supponiamo allora che A abbia $r \leq 2$

autovalori distinti, che saranno dunque necessariamente reali (essendo A reale, se avesse un autovalore complesso avrebbe anche quello coniugato, con la stessa molteplicità algebrica, ma la somma di tali molteplicità deve essere 3). Sono allora possibili i casi seguenti.

- (I) A ha due autovalori distinti $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, con molteplicità algebriche $n_1 = 1, n_2 = 2$. Allora necessariamente la molteplicità geometrica di μ_1 è $m_1 = 1$, mentre si può avere $m_2 = 1$ o $m_2 = 2$. Per decidere il valore di m_2 si cerca allora un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$(A - \mu_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0, \quad (A - \mu_2 \mathbb{1}) v_{2,2} \neq 0 \quad (3.10)$$

(cioè $v_{2,2} \in \ker(A - \mu_2 \mathbb{1})^2 \setminus \ker(A - \mu_2 \mathbb{1})$). Sono allora possibili i seguenti due sottocasi.

- (i) Non esiste un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.10). Ne segue che allora $m_2 = 2$ e la matrice A è diagonalizzabile, per cui si ricade nella situazione coperta dalla proposizione 3.1.
(ii) Esiste un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.10). Ne segue che allora $m_2 = 1$ e A non è diagonalizzabile. In base a tali dati, è direttamente possibile dire che la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

In questo caso il vettore $v_{2,2}$ è detto un *autovettore generalizzato* di A . Posto poi

$$v_{2,1} := (A - \mu_2 \mathbb{1}) v_{2,2} \quad (3.12)$$

per le (3.10) si ha $v_{2,1} \neq 0$ e $(A - \mu_2 \mathbb{1}) v_{2,1} = (A - \mu_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0$, e dunque $v_{2,1}$ è l'unico (a meno di moltiplicazione per una costante) autovettore di A relativo all'autovalore μ_2 . Indicato poi con $v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un autovettore di A relativo a μ_1 la matrice

$$C = [v_1 \quad v_{2,1} \quad v_{2,2}]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.11). È dunque a questo punto possibile calcolare esplicitamente e^{tA} . Tuttavia, come nel caso di matrici diagonalizzabili, anche in questo caso tale calcolo può essere piuttosto laborioso, e allo scopo di scrivere l'integrale generale di (3.3) può convenire usare una formula analoga alla (3.6). A tale scopo osserviamo che, in base alle (3.11), (3.9), (3.8),

$$\begin{aligned} e^{tA} v_{2,2} &= C e^{tJ} C^{-1} v_{2,2} = C e^{tJ} e_3 = C \begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} & e^{\mu_2 t} t \\ 0 & 0 & e^{\mu_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\mu_2 t} t \\ e^{\mu_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{\mu_2 t} C (t e_2 + e_3) = e^{\mu_2 t} (t v_{2,1} + v_{2,2}) \end{aligned}$$

e pertanto, tenendo conto che v_1 e $v_{2,1}$ sono autovettori di A , e dunque, analogamente al caso diagonalizzabile $e^{tA} v_1 = e^{\mu_1 t} v_1$, $e^{tA} v_{2,1} = e^{\mu_2 t} v_{2,1}$, l'integrale generale del sistema lineare omogeneo (3.3) è dato da

$$\begin{aligned} y(t, c) &= e^{tA} [c_1 v_1 + c_{2,1} v_{2,1} + c_{2,2} v_{2,2}] \\ &= c_1 e^{\mu_1 t} v_1 + (c_{2,1} + c_{2,2} t) e^{\mu_2 t} v_{2,1} + c_{2,2} e^{\mu_2 t} v_{2,2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

- (II) A ha un solo autovalore $\mu_1 \in \mathbb{R}$ di molteplicità algebrica $n_1 = 3$. Dunque per la sua molteplicità geometrica si può avere $m_1 = 1, 2, 3$. Il caso $m_1 = 3$ è però banale: in tal caso infatti necessariamente $A = \mu_1 \mathbb{1}$ è già diagonale (e quindi il suo esponenziale è ovviamente $e^{tA} = e^{\mu_1 t} \mathbb{1}$). Supponiamo dunque che $A - \mu_1 \mathbb{1} \neq 0$. Per determinare la molteplicità geometrica m_1 dell'autovalore μ_1 e dunque la forma canonica di Jordan di A si calcola $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2$ (si noti che in questo caso si ha necessariamente $(A - \mu_1 \mathbb{1})^3 = 0$). Sono allora possibili i seguenti due sottocasi.

- (i) $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 = 0$. Allora si ha $m_1 = 2$ e dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Inoltre, poiché per ipotesi $A - \mu_1 \mathbb{1} \neq 0$, esisterà un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$(A - \mu_1 \mathbb{1}) v_3 \neq 0. \quad (3.15)$$

Anche in questo caso v_3 è un autovettore generalizzato di A . Posto poi

$$v_2 := (A - \mu_1 \mathbb{1}) v_3 \quad (3.16)$$

per la (3.15) si ha $v_2 \neq 0$, ed essendo $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 = 0$ si ha $(A - \mu_1 \mathbb{1})v_2 = (A - \mu_1 \mathbb{1})^2 v_3 = 0$, e dunque v_2 è un autovettore di A relativo all'autovalore μ_1 . Indicato poi con $v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un altro autovettore di A relativo a μ_1 linearmente indipendente da v_2 , la matrice

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.14). Anche in questo caso allo scopo di scrivere l'integrale generale di (3.3) può convenire evitare il calcolo esplicito di e^{tA} e usare invece una formula analoga alla (3.13). Ragionando infatti in modo del tutto analogo a quanto fatto nel punto (I.ii) si trova che in questo caso l'integrale generale del sistema lineare omogeneo (3.3) è dato da

$$y(t, c) = c_1 e^{\mu_1 t} v_1 + (c_2 + c_3 t) e^{\mu_1 t} v_2 + c_3 e^{\mu_1 t} v_3. \quad (3.17)$$

- (ii) $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 \neq 0$. Allora l'autovalore μ_1 ha molteplicità geometrica $m_1 = 1$ e dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Inoltre esisterà un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 v_3 \neq 0.$$

Posto allora

$$v_2 := (A - \mu_1 \mathbb{1})v_3, \quad v_1 := (A - \mu_1 \mathbb{1})v_2 = (A - \mu_1 \mathbb{1})^2 v_3, \quad (3.19)$$

si avrà $v_1, v_2 \neq 0$, e $(A - \mu_1 \mathbb{1})v_1 = (A - \mu_1 \mathbb{1})^3 v_3 = 0$, cioè v_1 è l'unico (a meno di moltiplicazione per una costante) autovettore di A , mentre v_2 e v_3 sono autovettori generalizzati. Di nuovo la matrice

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.18). Per ottenere una formula analoga alle (3.13) e (3.17) in questo caso osserviamo che, grazie alle (3.18), (3.8),

$$\begin{aligned} e^{tA} v_3 &= C e^{tJ} C^{-1} v_3 = C e^{tJ} e_3 = C e^{\mu_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\mu_1 t} C \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{\mu_1 t} C \left(\frac{t^2}{2} e_1 + t e_2 + e_3 \right) = e^{\mu_1 t} \left(\frac{t^2}{2} v_1 + t v_2 + v_3 \right) \\ e^{tA} v_2 &= C e^{tJ} C^{-1} v_2 = C e^{tJ} e_2 = C e^{\mu_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{\mu_1 t} C \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{\mu_1 t} C (t e_1 + e_2) = e^{\mu_1 t} (t v_1 + v_2). \end{aligned}$$

Di conseguenza l'integrale generale di (3.3) è in questo caso

$$y(t, c) = \left(c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2!} \right) e^{\mu_1 t} v_1 + (c_2 + c_3 t) e^{\mu_1 t} v_2 + c_3 e^{\mu_1 t} v_3. \quad (3.20)$$

Concludiamo osservando che anche per esprimere la soluzione particolare del sistema non omogeneo tramite il metodo di variazione delle costanti, teorema 3.2, si può evitare il calcolo esplicito dell'esponentiale decomponendo il termine noto $b(s)$ nella base degli autovettori generalizzati di A , analogamente a quanto fatto per ottenere le (3.13), (3.17), (3.20). Ad esempio nel caso (I.ii), se

$$b(s) = b_1(s)v_1 + b_{2,1}(s)v_{2,1} + b_{2,2}(s)v_{2,2}, \quad s \in \mathbb{R},$$

è tale decomposizione, si otterrà la soluzione particolare

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^t ds e^{(t-s)A} [b_1(s)v_1 + b_{2,1}(s)v_{2,1} + b_{2,2}(s)v_{2,2}] \\ &= \int_0^t ds e^{\mu_1(t-s)} b_1(s) v_1 + \int_0^t ds e^{\mu_2(t-s)} [b_{2,1}(s) + (t-s)b_{2,2}(s)] v_{2,1} + \int_0^t ds e^{\mu_2(t-s)} b_{2,2}(s) v_{2,2}. \end{aligned}$$

Facciamo infine alcuni esempi dell'uso dell'algoritmo appena esposto.

Esempi 3.6. (a) Calcoliamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

nonché l'esponenziale della matrice A dei coefficienti.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti si determinano da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(2 - \lambda)^2 + 2 - 2 - (3 - \lambda) + 2(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

e quindi gli autovalori distinti sono $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 3$, con molteplicità algebriche $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ e siamo dunque nel caso (I) dell'algoritmo. Cerchiamo allora una soluzione delle (3.10). Avendosi

$$A - 3\mathbb{I} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A - 3\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

si vede che $v = (x, y, z) \in \ker(A - 3\mathbb{I})^2$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x - y) \\ 0 \\ 4(x - y) \end{bmatrix},$$

cioè $y = x$, e allora la condizione $v = (x, x, z) \notin \ker(A - 3\mathbb{I})$ è equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x - z \\ x - z \end{bmatrix},$$

da cui $x \neq z$, e quindi $v_{2,2} = (0, 0, 1)$ è un autovettore generalizzato di A relativo a $\mu_2 = 3$ che non è un autovettore (e dunque la molteplicità geometrica di μ_2 è $m_2 = 1$, siamo cioè nel caso (I.ii)), mentre $v_{2,1} := (A - 3\mathbb{I})v_{2,2} = (-1, -1, -1) \in \ker(A - 3\mathbb{I})$ è l'autovettore associato a μ_2 . Inoltre l'unico autovettore v_1 associato a μ_1 si ottiene da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A - \mathbb{I})v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ x + 2y - z \\ -x + 2y + z \end{bmatrix}$$

e dunque $v_1 = (1, 0, 1)$. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è $A = CJC^{-1}$ dove

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema si può ottenere dalla (3.13):

$$y(t) = c_1 e^t v_1 + (c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t}v_{2,1} + c_{2,2}e^{3t}v_{2,2} = \begin{bmatrix} c_1 e^t - (c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t} \\ -(c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t} \\ c_1 e^t - (c_{2,1} - c_{2,2}(1 - t))e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Imponendo poi la condizione iniziale si trova

$$y(0) = \begin{bmatrix} c_1 - c_{2,1} \\ -c_{2,1} \\ c_1 - c_{2,1} + c_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_{2,1} = -1, c_{2,2} = 1,$$

e dunque la soluzione del problema di Cauchy desiderata è

$$y(t) = \begin{bmatrix} -e^t + (1 - t)e^{3t} \\ (1 - t)e^{3t} \\ -e^t + (2 - t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda il calcolo di e^{tA} si ha

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e l'esponenziale è dunque

$$e^{tA} = C \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} e^t + te^{3t} & -e^t + e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & e^{3t} & -te^{3t} \\ (t-1)e^{3t} + e^t & -e^t + e^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(b) Calcoliamo l'integrale generale del sistema non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_3 + 2 \cosh t, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 + y_3 + e^{-t}, \end{cases}$$

nonché l'esponenziale della matrice A dei coefficienti.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti si determinano da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) + (2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) = (2 - \lambda)^3 = 0 \end{aligned}$$

e quindi c'è un unico autovalore $\mu_1 = 2$, con molteplicità algebrica $n_1 = 3$, e siamo dunque nel caso (II) dell'algoritmo. Calcoliamo allora

$$(A - 2\mathbb{1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui si vede che siamo nel caso (II.i). Cerchiamo allora un vettore $v_3 = (x, y, z)$ tale che

$$(A - 2\mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x - z \\ x - z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una soluzione è ovviamente $v_3 = (1, 0, 0)$, e siamo dunque nel caso (II.i.b), cioè $\mu_1 = 2$ ha molteplicità geometrica $m_1 = 2$. Definiamo allora

$$v_2 := (A - 2\mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che sarà un autovettore di A , e determiniamo un altro autovettore $v_1 = (x, y, z)$ da esso linearmente indipendente:

$$(A - 2\mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x - z \\ x - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui $v_1 = (1, 0, 1)$. L'integrale generale del sistema omogeneo si ottiene allora dalla (3.17):

$$y_o(t) = c_1 e^{2t} v_1 + (c_2 + c_3 t) e^{2t} v_2 + c_3 e^{2t} v_3 = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3(1+t) \\ c_2 + c_3 t \\ c_1 + c_2 + c_3 t \end{bmatrix},$$

mentre per la soluzione particolare del sistema non omogeneo possiamo usare la (3.5) con $b(s) = (2 \cosh s, 0, e^{-s})$. Conviene però, come osservato, prima decomporre il vettore $b(s)$ nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ degli autovettori generalizzati di A :

$$b(s) = \begin{bmatrix} 2 \cosh s \\ 0 \\ e^{-s} \end{bmatrix} = b_1(s) v_1 + b_2(s) v_2 + b_3(s) v_3 = \begin{bmatrix} b_1(s) + b_2(s) + b_3(s) \\ b_2(s) \\ b_1(s) + b_2(s) \end{bmatrix},$$

da cui $b_2(s) = 0$, $b_1(s) = e^{-s}$ e $b_3(s) = 2 \cosh s - b_1(s) = e^s$. Dunque la (3.5) diventa

$$y_p(t) = \int_0^t ds e^{(t-s)A} (e^{-s}v_1 + e^s v_3) = \int_0^t ds (e^{-s}e^{(t-s)A}v_1 + e^s e^{(t-s)A}v_3),$$

e ricordando che, essendo v_1 un autovettore e v_3 un autovettore generalizzato di A ,

$$e^{(t-s)A}v_1 = e^{2(t-s)}v_1, \quad e^{(t-s)A}v_3 = e^{2(t-s)}(v_3 + (t-s)v_2),$$

si ottiene

$$y_p(t) = e^{2t} \left[\left(\int_0^t ds e^{-3s} \right) v_1 + \left(\int_0^t ds (t-s)e^{-s} \right) v_2 + \left(\int_0^t ds e^{-s} \right) v_3 \right].$$

Si ha poi ovviamente

$$\int_0^t ds e^{-3s} = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}), \quad \int_0^t ds e^{-s} = 1 - e^{-t},$$

e, integrando per parti,

$$\int_0^t ds (t-s)e^{-s} = t \int_0^t ds e^{-s} - \int_0^t ds s e^{-s} = t(1 - e^{-t}) - [-s e^{-s}]_0^t - \int_0^t ds e^{-s} = t + e^{-t} - 1,$$

e pertanto la soluzione particolare del sistema è data da

$$y_p(t) = e^{2t} \left[\frac{1}{3}(1 - e^{-3t})v_1 + (t + e^{-t} - 1)v_2 + (1 - e^{-t})v_3 \right] = e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + t \\ t + e^{-t} - 1 \\ \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + t + e^{-t} - 1 \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema considerato da

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3(1+t) + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + t \\ c_2 + c_3t + t + e^{-t} - 1 \\ c_1 + c_2 + c_3t + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + t + e^{-t} - 1 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'esponenziale si ha $A = CJC^{-1}$ con

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$e^{tA} = C e^{tJ} C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & 0 & -t \\ t & 1 & -t \\ t & 0 & 1-t \end{bmatrix}.$$