ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2020-21
PROVA SCRITTA DEL 9/9/2021

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione
$$f(x, y) = x^4 - xy^2 + y^2 + 9$$
determinarne:
(a) gli eventuali punti stazionari, e la loro natura;
(b) il massimo e il minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$, se esistono;
(c) il massimo e il minimo assoluto nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 1\}$, se esistono.
Soluzione. (a) I punti stazionari di f, che essendo un polinomio è di classe C^∞, si ottengono annullandone il gradiente:
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - y^2 = 0, \\ f_y(x, y) = 2y(1 - x) = 0. \end{cases}$$
La seconda equazione ha evidentemente le soluzioni $y = 0$ o $x = 1$. Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione si ottiene $4x^3 = 0$, e dunque $(0, 0)$ è un punto stazionario di f. Sostituendo invece $x = 1$ nella prima equazione si ottiene $4 - y^2 = 0$, da cui $y = \pm 2$, e quindi gli altri due punti stazionari $(1, \pm 2)$. L'hessiana di f è
$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -2y \\ -2y & 2(1 - x) \end{bmatrix},$$
e quindi essendo
$$D^2 f(1, \pm 2) = \begin{bmatrix} 12 & \mp 24 \\ \mp 24 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D^2 f(1, \pm 2) = -(24)^2 < 0,$$
si vede che $(1, \pm 2)$ sono punti di sella. Essendo invece l'hessiana in $(0, 0)$
$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
semidefinita positiva, non ci fornisce informazioni sulla natura di $(0, 0)$. Tuttavia si ha $f(0, 0) = 9$, e se $1 - x > 0$, cioè $x < 1$, essendo chiaramente $x^4 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, si ha pure
$$f(x, y) = x^4 + y^2(1 - x) + 9 \geq 9 = f(0, 0)$$
e pertanto, essendo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 1\}$ un intorno di $(0, 0)$, si deduce che $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo per f.

(b) Poiché f non ha massimi relativi, non ha nemmeno massimi assoluti. Inoltre restringendo f alla retta $x = 2$ si ha
$$\lim_{y \to +\infty} f(2, y) = \lim_{y \to +\infty} 16 - y^2 + 9 = -\infty,$$
e dunque f non ha nemmeno minimi assoluti.

(c) L'insieme D è la parte di piano al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$ e al di sotto della retta $y = 1$, ed è quindi chiaramente compatto. Per il teorema di Weierstrass esistono dunque $\min_D f$ e $\max_D f$, e, poiché f non ha punti stazionari all'interno di D (il punto $(0, 0)$ è sulla frontiera), i punti di massimo e minimo assoluto di f in D devono trovarsi sulla frontiera $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ di D, dove
$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\, y = x^2\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\, y = 1\}.$$
Notiamo che $(\pm 1, 1) \in \partial D$ sono punti non regolari di ∂D, poiché in essi non esiste un vettore normale a ∂D, e bisogna quindi considerare i valori
$$f(-1, 1) = 12, \qquad f(1, 1) = 10.$$

Inoltre il punto $(0,0) \in \Gamma_1$ essendo un minimo relativo di f su $\mathbb{R}^2$ sarà anche un minimo relativo di f vincolato a Γ_1. Per capire se su Γ_1 ci sono altri punti estremali vincolati, consideraiamo la restrizione di f a Γ_1, cioè la funzione $g_1(x) := f(x, x^2) = -x^5 + 2x^4 + 9$, $x \in [-1, 1]$. Essendo allora $g_1'(x) = x^3(8 - 5x)$ si vede che g_1 è decrescente per $x \in [-1, 0)$ e crescente per $x \in (0, 1]$ e ha un minimo per $x = 0$ (si osservi che il punto $x = 8/5$ in cui g_1' si annulla non appartiene all'intervallo $[-1, 1]$). Si ottiene dunque che $(0, 0)$ è l'unico minimo di f vincolato a Γ_1, e come già visto $f(0, 0) = 9$. Infine restringendo f a Γ_2 si ottiene la funzione $g_2(x) := f(x, 1) = x^4 - x + 10$, $x \in [-1, 1]$, ed essendo $g_2'(x) = 4x^3 - 1$ si deduce che g_2 è decrescente per $x \in [-1, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$, crescente per $x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1]$ ed ha un minimo per $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Dunque il punto $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1) \in \Gamma_2$ è un minimo relativo per f vincolato a ∂D e $f(1, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = 10 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4^{4/3}}$. Avendosi allora

$$9 < 10 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4^{4/3}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4^{4/3}} = \frac{4^{4/3} - 3}{4^{4/3}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{4/3} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4^4 > 3^3,$$

ed essendo l'ultima disuguaglianza evidentemente vera, si deduce che $\min_D f = 9$ e $\max_D f = 12$.

2. Calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{x^2 + y}{(x^2 - y^2)^{3/2}}\, dxdy,$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\ x^2 - y^2 \ge 1\}$.

Soluzione. Osserviamo per iniziare che

$$\begin{aligned}\iint_E \frac{x^2 + y}{(x^2 - y^2)^{3/2}}\, dxdy &= \iint_E \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{3/2}}\, dxdy + \iint_E \frac{y}{(x^2 - y^2)^{3/2}}\, dxdy \\ &= \iint_E \frac{x^2}{(x^2 - y^2)^{3/2}}\, dxdy,\end{aligned}$$

poiché la funzione $(x, y) \mapsto \frac{y}{(x^2-y^2)^{3/2}}$ è dispari rispetto a y e l'insieme E è invariante per $y \mapsto -y$. Per calcolare il primo integrale, in base alla forma della funzione integranda e dell'insieme di integrazione, e ricordando che per le funzioni iperboliche vale $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$, si vede che conviene usare le coordinate iperboliche (u, v), definite da

$$\Psi : \begin{cases} x = u \cosh v, \\ y = u \sinh v, \end{cases} \qquad \det J_\Psi(u, v) = \det \begin{bmatrix} \cosh v & u \sinh v \\ \sinh v & u \cosh v \end{bmatrix} = u(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u,$$

tramite le quali l'insieme di integrazione diventa

$$D = \Psi^{-1}(E) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le u \cosh v \le 2,\ u^2 \ge 1\}.$$

Si ha poi

$$1 \le \frac{2}{\cosh v} \quad \Leftrightarrow \quad \cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2v} - 4e^v + 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 4z + 1 \le 0,$$

dove nell'ultimo passaggio si è posto $z = e^v$, e poiché l'equazione $z^2 - 4z + 1 = 0$ ha le soluzioni $z = 2 \pm \sqrt{3} > 0$, si vede che $1 \le \frac{2}{\cosh v}$ se e solo se $\log(2 - \sqrt{3}) \le v \le \log(2 + \sqrt{3})$, e dunque l'insieme di integrazione si può scrivere come

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \log(2 - \sqrt{3}) \le v \le \log(2 + \sqrt{3}),\ 1 \le u \le \frac{2}{\cosh v}\right\}$$

che è normale rispetto all'asse v. Dunque l'integrale cercato diventa

$$\begin{aligned}\int_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} dv \int_1^{\frac{2}{\cosh v}} du\, u \frac{u^2 \cosh^2 v}{u^3} &= \int_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} dv \cosh^2 v \left(\frac{2}{\cosh v} - 1\right) \\ &= [2 \sinh v]_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} - \int_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} dv \cosh^2 v.\end{aligned}$$

Si ha poi

$$\int dv\, \cosh^2 v = \frac{1}{4} \int dv\, (e^{2v} + e^{-2v} + 2) = \frac{1}{8}(e^{2v} - e^{-2v}) + \frac{v}{2} = \frac{1}{4} \sinh(2v) + \frac{v}{2},$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\sinh(\log(2\pm\sqrt{3})) &= \frac{e^{\log(2\pm\sqrt{3})}-e^{-\log(2\pm\sqrt{3})}}{2} = \frac{1}{2}\left(2\pm\sqrt{3}-\frac{1}{2\pm\sqrt{3}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\pm\sqrt{3}-(2\mp\sqrt{3})\right) = \pm\sqrt{3},\\
\sinh(2\log(2\pm\sqrt{3})) &= \sinh(\log(7\pm 4\sqrt{3})) = \frac{1}{2}\left(7\pm 4\sqrt{3}-\frac{1}{7\pm 4\sqrt{3}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(7\pm 4\sqrt{3}-(7\mp 4\sqrt{3})\right) = \pm 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto è

$$\iint_E \frac{x^2+y}{(x^2-y^2)^{3/2}}\,dxdy = \left[2\sinh v-\frac{1}{4}\sinh(2v)-\frac{v}{2}\right]_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right).$$

3. Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}+z^2, \frac{x}{x^2+y^2}-y^2, x^2\right)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t, \sin t\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, orientata nel verso delle t crescenti.
Soluzione. Il campo considerato si può decomporre come una somma $F = F_1 + F_2$, dove

$$F_1(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right), \quad F_2(x,y,z) = \left(z^2, -y^2, x^2\right).$$

Analogamente a quanto visto a lezione in due dimensioni, il campo F_1 è irrotazionale sull'insieme non semplicemente connesso $D = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$. Inoltre la curva chiusa γ è omotopa in D alla curva chiusa $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t\in[0,2\pi]$, un'omotopia essendo ad esempio

$$h(t,\lambda) = ((1+2\lambda)\cos t, (1+\lambda)\sin t, \lambda\sin t\cos t), \quad (t,\lambda)\in[0,2\pi]\times[0,1].$$

Dunque per l'invarianza omotopica dell'integrale di un campo irrotazionale

$$\int_\gamma \langle F_1, ds\rangle = \int_\beta \langle F_1, ds\rangle = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t)+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t\right) = 2\pi.$$

Per quanto riguarda l'integrale del campo F_2, usando la definizione si ha

$$\int_\gamma \langle F_2, ds\rangle = \int_0^{2\pi}(-3\sin^3 t\cos^2 t - 8\sin^2 t\cos t + 18\cos^4 t - 9\cos^2 t)dt.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 t\cos^2 t\,dt &= (u=\cos t) = -\int(1-u^2)u^2du = -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c = -\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{\sin^5 t}{5}+c,\\
\int \sin^2 t\cos t\,dt &= (u=\sin t) = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+c = \frac{\sin^3 t}{3}+c,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{2\pi}(-3\sin^3 t\cos^2 t - 8\sin^2 t\cos t)dt = \left[\sin^3 t-\frac{3}{5}\sin^5 t-\frac{8}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si ha infine, come noto, $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \pi$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos t+\cos^2 2t)dt\\
&= \frac{1}{4}\left(2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\cos^2 u\,du\right) = \frac{1}{4}\left(2\pi+\frac{1}{2}2\pi\right) = \frac{3}{4}\pi,
\end{aligned}$$

e pertanto

$$\int_\gamma\langle F_2, ds\rangle = 18\cdot\frac{3}{4}\pi - 9\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

In conclusione, l'integrale richiesto è

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = 2\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{13}{2}\pi.$$

4. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2 - 3y_3, \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 - 4y_2 + 2y_3, \end{cases}$$

determinare:
(a) il suo integrale generale;
(b) tutti vettori $y_0 \in \mathbb{R}^3$, se esistono, tali che la soluzione con dato iniziale $y(0) = y_0$ soddisfi $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Soluzione. (a) Gli autovalori della matrice A dei coefficienti del sistema sono le radici del polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & -4 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2+\lambda)(3+\lambda)(2-\lambda) + 3 + 12 - 3(3+\lambda) - 4(2+\lambda) - 3(2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda-1)(\lambda+2)^2, \end{aligned}$$

e dunque A ha i due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità algebriche $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$ rispettivamente. L'autovettore $v_1 = (x, y, z)$ relativo a λ_1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(A - \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + 3y - 3z \\ x - 4y + z \\ x - 4y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = x + z$ e sostituendo questo nella seconda equazione si ricava $-3x - 3z = 0$, da cui $x = -z$ e $y = z + x = 0$. Dunque $v_1 = (-1, 0, 1)$. Per determinare la molteplicità geometrica di λ_2 e gli associati autovettori (generalizzati), cerchiamo un vettore $v_{2,2} = (x, y, z) \in \ker(A - \lambda_2\mathbb{1})^2 \setminus \ker(A - \lambda_2\mathbb{1})$. Si ha allora

$$(A + 2\mathbb{1})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix},$$

e pertanto

$$(A + 2\mathbb{1})^2 v_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9(y-z) \\ 0 \\ 9(z-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = z,$$

$$(A + 2\mathbb{1}) v_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ x \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Ne segue che la molteplicità geometrica di λ_2 è 1 e $v_{2,2} = (1, 0, 0)$ è un corrispondente autovettore generalizzato. L'autovettore $v_{2,1}$ associato a λ_2 si ottiene poi da $v_{2,1} = (A + 2\mathbb{1})v_{2,2} = (0, 1, 1)$. L'integrale generale del sistema è pertanto

$$y(t) = c_1 e^t v_1 + e^{-2t}[(c_2 + c_3 t)v_{2,1} + c_3 v_{2,2}] = \begin{bmatrix} -c_1 e^t + c_3 e^{-2t} \\ e^{-2t}(c_2 + c_3 t) \\ c_1 e^t + e^{-2t}(c_2 + c_3 t) \end{bmatrix}.$$

(b) Dalla formula dell'integrale generale sopra ottenuta si ha che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ se e solo se $c_1 = 0$. In tal caso il dato iniziale della soluzione sarà

$$y_0 = y(0) = c_2 v_{2,1} + c_3 v_{2,2} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

e dunque i vettori richiesti sono tutti e solo quelli della forma $y_0 = (a, b, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.