**ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA**
**A.A. 2020-21**
**PROVA SCRITTA DEL 25/8/2021**

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

**1.** Data la funzione

$$f(x,y) = y(y+2)(y-x^2+2)$$

determinarne:
(a) gli eventuali punti stazionari, e la loro natura;
(b) il massimo e il minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$, se esistono;
(c) il massimo e il minimo assoluto nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\, x^2-2 \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$, se esistono.

*Soluzione.* (a) I punti stazionari di $f$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2xy(y+2) = 0, \\ f_y(x,y) = -2x^2y + 3y^2 - 2x^2 + 8y + 4 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha le soluzioni $x = 0$, $y = 0$ o $y = -2$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si ottiene l'equazione $3y^2 + 8y + 4 = 0$, che ha le due soluzioni $y = -\frac{2}{3}$, $y = -2$. Ponendo poi $y = 0$ nella seconda equazione si ottiene l'equazione $-2x^2 + 4 = 0$, da cui $x = \pm\sqrt{2}$. Sostituendo infine $y = -2$ nella seconda equazione si ricava l'equazione $2x^2 = 0$, da cui $x = 0$. Si ottengono in definitiva i quattro punti stazionari $(0, -\frac{2}{3}), (0,-2), (\pm\sqrt{2}, 0)$. Per studiarne la natura, calcoliamo l'hessiana di $f$:

$$D^2f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y(y+2) & -4x(y+1) \\ -4x(y+1) & -2x^2+6y+8 \end{bmatrix}.$$

Si ha allora:

$$D^2f(0,-\tfrac{2}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha due autovalori positivi, per cui $(0, -\frac{2}{3})$ è un minimo relativo;

$$D^2f(\pm\sqrt{2},0) = \begin{bmatrix} 0 & \mp 4\sqrt{2} \\ \mp 4\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D^2f(\pm\sqrt{2},0) = -32 < 0,$$

e quindi $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sono punti di sella;

$$D^2f(0,-2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D^2f(0,-2) = 0,$$

che è semidefinita negativa, e quindi non dà informazioni circa la natura del punto stazionario. Si può tuttavia osservare che $f(0,-2) = 0$ e che, essendo $f$ il prodotto di tre fattori, sarà positiva se e solo se sono tutti e tre positivi, o uno è positivo e gli altri due negativi. Dunque $f$ è positiva nella regione colorata in fig. 1 (dove è indicata anche, dalla linea spessa, la frontiera dell'insieme $D$ del punto (c)), da cui è evidente che $(0,-2)$ è un punto di sella. Osserviamo che da tale figura è anche evidente la natura degli altri punti stazionari, senza che sia necessario calcolare l'hessiana di $f$.

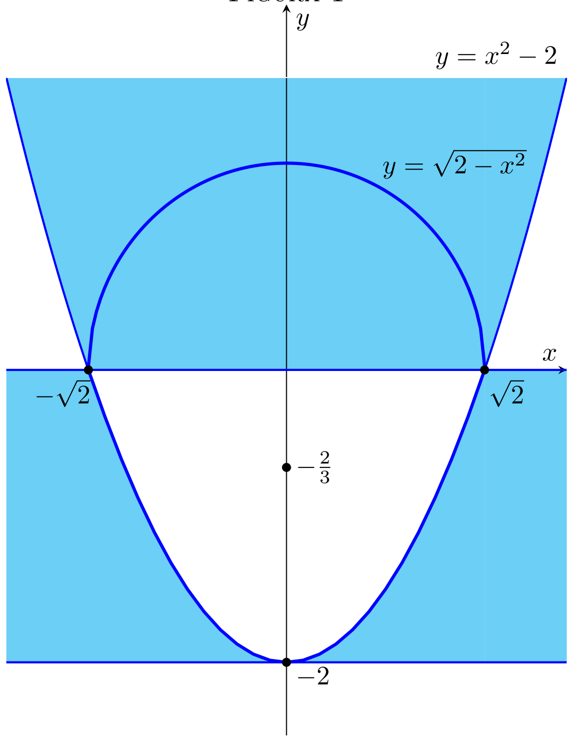
(b) Si ha chiaramente

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\pm\infty} y^3 + 4y^2 + 4y = \pm\infty,$$

e dunque $f$ non ammette massimo né minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

(c) Detti $m$ e $M$ il minimo e il massimo rispettivamente delle funzioni continue $x \mapsto x^2 - 2$ e $x \mapsto \sqrt{2-x^2}$ nell'intervallo compatto $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, si ha $D \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [m, M]$. Dunque $D$ è limitato, e chiaramente chiuso, e quindi per il teorema di Weierstrass esistono $\min_D f$ e $\max_D f$. Il punto di minimo assoluto di $f$ in $D$ può trovarsi o all'interno di $D$, nel qual caso sarà il punto

FIGURA 1




$(0, -\frac{2}{3})$, che è l'unico minimo relativo di $f$ in $D$, oppure può trovarsi su $\partial D$. Osserviamo però che $f(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{32}{27} < 0$, che $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ y = x^2 - 2\},$$
$$\Gamma_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ y = \sqrt{2 - x^2}\},$$

e che, come si vede dalla fig. 1, $f$ è identicamente nulla su $\Gamma_1$ e non negativa su $\Gamma_2$, e dunque $f(x, y) > f(0, -\frac{2}{3})$ per ogni $(x, y) \in \partial D$. Pertanto $\min_D f = f(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{32}{27}$. Non essendoci punti di massimo relativo di $f$, il punto di massimo assoluto di $f$ in $D$ deve necessariamente trovarsi su $\partial D$ e in particolare, per quanto appena osservato, su $\Gamma_2$. Posto $g(x, y) = y - \sqrt{2 - x^2}$, in base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange sarà allora soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = -2x(y^2 + 2y + \lambda) = 0, \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = -2x^2 y + 3y^2 - 2x^2 + 8y + 4 - 2\lambda = 0, \\ g(x, y) = y - \sqrt{2 - x^2} = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $x = 0$ oppure $\lambda = -y^2 - 2y$. Sostituendo $x = 0$ nella terza equazione si ottiene il punto $(0, \sqrt{2}) \in \Gamma_2$. Sostituendo invece $\lambda = -y^2 - 2y$ e $x^2 = 2 - y^2$ (che si ottiene quadrando la terza equazione) nella seconda equazione si ottiene l'equazione $y(4y^2 + 9y + 4) = 0$, che ha le soluzioni $y = 0$ e $y = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{8} < 0$. Queste ultime non sono accettabili, poiché dalla terza equazione segue $y \ge 0$. Sostituendo invece $y = 0$ nella terza equazione si ottengono i due punti $(\pm\sqrt{2}, 0) \in \Gamma_2$. Poiché allora $f(\pm\sqrt{2}, 0) = 0$, si conclude che $\max_D f = f(0, \sqrt{2}) = 2(4 + 3\sqrt{2})$.

**2.** Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha},$$

determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali essa risulta sommabile nell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \ge 0,\ y \ge 0,\ \arctan \frac{y}{x} \le \sqrt{x^2 + y^2} \le \frac{\pi}{4} \right\},$$

e calcolare poi $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ per $\alpha = 1$.

*Soluzione.* L'insieme $D$ è limitato e misurabile (vedere commento alla fine della soluzione), e se $\alpha \le 0$ la funzione $f$ è definita e continua in $D$, ed è dunque banalmente sommabile. Se invece

$\alpha > 0$ essa è definita, continua e non negativa in $D \setminus \{(0,0)\}$. Posto allora

$$D_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, \arctan\frac{y}{x} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{4},\, \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

si ottiene una successione crescente di insiemi limitati e misurabili su cui $f$ è continua e limitata e che contiene definitivamente ogni insieme limitato misurabile su cui $f$ è continua e limitata, e dunque $f$ sarà sommabile in $D$ se e solo se esiste finito $\lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy$. Passando in coordinate polari l'insieme $D_n$ diventa

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,\middle|\, r\cos\theta \geq 0,\, r\sin\theta \geq 0,\, \arctan(\tan\theta) \leq r \leq \frac{\pi}{4},\, r \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Dalle condizioni $r\cos\theta \geq 0$, $r\sin\theta \geq 0$ segue $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e quindi $\arctan(\tan\theta) = \theta$. Dunque

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, \theta \leq r \leq \frac{\pi}{4},\, r \geq \frac{1}{n} \right\} \\ &= \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,\middle|\, \frac{1}{n} \leq r \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq \theta \leq r \right\}, \end{aligned}$$

e pertanto

$$\iint_{D_n} \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dr}{r^{2\alpha-2}} \int_0^r d\theta\, \cos\theta = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{4}} dr\, \frac{\sin r}{r^{2\alpha-2}},$$

da cui segue che $f$ è sommabile in $D$ se e solo se la funzione di una variabile $g(r) = \frac{\sin r}{r^{2\alpha-2}}$ è impropriamente integrabile in $[0, \frac{\pi}{4}]$. Avendosi allora

$$\frac{\sin r}{r^{2\alpha-2}} \sim \frac{1}{r^{2\alpha-3}} \quad \text{per } r \to 0^+,$$

si conclude che $f$ è sommabile in $D$ se e solo se $2\alpha - 3 < 1$, cioè $\alpha < 2$.

Se poi $\alpha = 1$, da quanto appena visto si ha

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{4}} dr\, \sin r = \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(La misurabilità di $D$, la cui verifica non era comunque richiesta, segue facilmente osservando che, analogamente a quanto detto sopra, in coordinate polari $D$ diventa l'insieme triangolare

$$E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,\middle|\, 0 \leq r \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq \theta \leq r \right\}$$

e che quindi $\partial D$ è l'unione dei sostegni delle tre curve regolari di equazioni polari $\theta = 0$, $0 \leq r \leq \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, e $r = \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, e ha pertanto misura nulla. Analogamente si verifica la misurabilità di $D_n$.)

**3.** Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2,\, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xy \right)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

*Soluzione.* Avendosi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 2y = \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xy \right),$$

si ha che il campo $F$ è irrotazionale, ma il suo dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso, quindi non possiamo concludere che $F$ sia conservativo. Per deciderlo, possiamo comunque cercare di determinarne un potenziale:

$$f(x,y) = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \right) dx = \sqrt{x^2+y^2} + xy^2 + g(y)$$

con $g$ funzione derivabile arbitraria. Imponendo allora

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xy = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xy + g'(y),$$

si ottiene $g(y) = c$ costante arbitaria, e si conclude che il campo $F$ è conservativo, e tutti i suoi potenziali sono dati da

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto l'integrale richiesto è

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(e^{-2\pi}, 0) - f(1, 0) = e^{-2\pi} - 1.$$

**4.** Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \Big(xy^2, \frac{y^3}{3}, \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) + z\Big)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \le z \le 2\}$$

orientata in modo che la normale positiva nel punto $(1, 0, 1)$ abbia terza componente negativa.
*Soluzione.* La superficie $\Sigma$ è la parte del cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compresa tra i piani di equazioni $z = 1$ e $z = 2$. Per ottenere una superficie senza bordo a cui applicare il teorema della divergenza definiamo i due dischi

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\},\\ \Sigma_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 4,\ z = 2\},\end{aligned}$$

in modo che se

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \le z \le 2\}$$

è la parte dell'interno del cono contenuta tra i due piani, si abbia $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Tenendo allora conto che il campo di versori normali positivi $n^+$ a $\Sigma$ definito nel testo punta all'esterno di $D$, dal teorema della divergenza si ha

$$\iint_\Sigma \langle F, n^+\rangle\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dxdydz - \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+\rangle\, dS - \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+\rangle\, dS,$$

dove $n_1^+ = (0, 0, -1)$ e $n_2^+ = (0, 0, 1)$ sono rispettivamente i versori normali a $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ esterni a $D$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\iiint_D \operatorname{div} F\, dxdydz &= \iiint_D (2y^2 + 1)\, dxdydz = \int_1^2 dz \int_0^z dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta (2r^2 \sin^2\theta + 1)\\ &= 2\pi \int_1^2 dz \int_0^z dr\, (r^3 + r) = 2\pi \int_1^2 dz \left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2}\right)\\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4}\left[\frac{z^5}{5}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2\right) = 2\pi\left(\frac{31}{20} + \frac{7}{6}\right) = \frac{163}{30}\pi,\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza si è usato il fatto che in coordinate cilindriche $D$ diventa l'insieme $\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le z \le 2,\ 0 \le r \le z,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, e nella terza il fatto che $\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta = \pi$. Si ha poi

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+\rangle\, dS &= -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (1 + \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2}))\, dxdy\\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr\, r(1 + \log(1 + r)) = -2\pi\left[\frac{1}{2} + \int_0^1 dr\, r\log(1 + r)\right]\end{aligned}$$

e inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int dr\, r\log(1+r) &= \frac{r^2}{2}\log(1+r) - \frac{1}{2}\int dr \frac{((1+r)-1)^2}{1+r}\\ &= \frac{r^2}{2}\log(1+r) - \frac{1}{2}\int dr \frac{(1+r)^2-2(1+r)+1}{1+r}\\ &= \frac{r^2}{2}\log(1+r) - \frac{1}{2}\int dr \left(r-1+\frac{1}{1+r}\right)\\ &= \frac{r^2-1}{2}\log(1+r) - \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2},\end{aligned}$$

da cui

$$\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+\rangle\, dS = -2\pi\left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{r^2-1}{2}\log(1+r) - \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2}\right]_0^1\right\} = -2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+\rangle\, dS &= \iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} (2+\log(1+\sqrt{x^2+y^2}))\, dxdy\\ &= 2\pi\int_0^2 dr\, r(2+\log(1+r)) = 2\pi\left\{4 + \left[\frac{r^2-1}{2}\log(1+r) - \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2}\right]_0^2\right\}\\ &= 2\pi\left(4+\frac{3}{2}\log 3\right).\end{aligned}$$

In conclusione il flusso richiesto è

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n^+\rangle\, dS = \frac{163}{30}\pi + \frac{3\pi}{2} - 2\pi\left(4+\frac{3}{2}\log 3\right) = -\pi\left(\frac{16}{15} + 3\log 3\right).$$