# ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
# A.A. 2020-21
# PROVA SCRITTA DEL 5/7/2021

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

**1.** Data la funzione

$$F(x,y,z) = x\sin x + \log(1+y^2) - z - \int_0^z \frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}dt,$$

(a) verificare che l'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(0,0)$, una funzione $z=f(x,y)$ tale che $f(0,0)=0$;

(b) verificare che il punto $(0,0)$ è stazionario per $f$, e determinarne la natura.

*Soluzione.* (a) Si ha chiaramente $F(0,0,0)=0$. Inoltre, poiché la funzione integranda $g(x,y,z,t) = \frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}$ è di classe $C^\infty$ nell'insieme $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,|\, t\neq -1/z^2\}$ e, per $|z|$ sufficientemente piccolo, il segmento $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,0\le t\le z\}$ appartiene a tale insieme, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha che $F$ è di classe $C^\infty$ in un intorno dell'origine e

$$F_z(x,y,z) = -1 - \frac{e^{-z^2(x^2+y^2)}}{1+z^3} - \int_0^z \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt$$

e dunque $F_z(0,0,0) = -2 \neq 0$ (notare che per ottenere questo risultato non è necessario calcolare esplicitamente la derivata all'interno dell'integrale, perché in ogni caso si ottiene un integrale con estremi coincidenti, che è dunque nullo). Sono dunque verificate le ipotesi del teorema di Dini in 3 dimensioni e pertanto l'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(0,0)$, una funzione $z=f(x,y)$, di classe $C^\infty$, tale che $f(0,0)=0$.

(b) Sempre dal teorema di Dini si ha, per le derivate parziali di $f$,

$$f_x(0,0) = -\frac{F_x(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} = \frac{1}{2}F_x(0,0,0), \qquad f_y(0,0) = -\frac{F_y(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} = \frac{1}{2}F_y(0,0,0).$$

Inoltre, usando ancora il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ottiene

$$F_x(x,y,z) = \sin x + x\cos x - \int_0^z \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt,$$

$$F_y(x,y,z) = \frac{2y}{1+y^2} - \int_0^z \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt,$$

e pertanto $F_x(0,0,0)=0=F_y(0,0,0)$, da cui $f_x(0,0)=0=f_y(0,0)$. Dunque $(0,0)$ è effettivamente un punto stazionario per $f$.

Per determinarne la natura, calcoliamo le derivate seconde di $f$. Derivando rispetto a $x$ l'identità, valida per ogni $(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$,

$$(*) \qquad F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0$$

e ponendo poi $(x,y)=(0,0)$ si ottiene, ricordando che $f(0,0)=0=f_x(0,0)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\big[F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\big]_{(x,y)=(0,0)} \\
&= F_{xx}(0,0,0) + F_{xz}(0,0,0)f_x(0,0) \\
&\quad + \big[F_{xz}(0,0,0) + F_{zz}(0,0,0)f_x(0,0)\big]f_x(0,0) + F_z(0,0,0)f_{xx}(0,0) \\
&= F_{xx}(0,0,0) + F_z(0,0,0)f_{xx}(0,0),
\end{aligned}$$

da cui

$$f_{xx}(0,0) = -\frac{F_{xx}(0,0,0)}{F_z(0,0)} = \frac{1}{2}F_{xx}(0,0,0).$$

Inoltre derivando analogamente la $(*)$ rispetto a $y$ e usando $f(0,0) = f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\big[F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\big]_{(x,y)=(0,0)} \\
&= F_{xy}(0,0,0) + F_{xz}(0,0,0)f_y(0,0) \\
&\quad + \big[F_{yz}(0,0,0) + F_{zz}(0,0,0)f_y(0,0)\big]f_x(0,0) + F_z(0,0,0)f_{xy}(0,0) \\
&= F_{xy}(0,0,0) + F_z(0,0,0)f_{xy}(0,0),
\end{aligned}$$

da cui

$$f_{xy}(0,0) = -\frac{F_{xy}(0,0,0)}{F_z(0,0)} = \frac{1}{2}F_{xy}(0,0,0).$$

Infine derivando rispetto a $y$ l'identità

$$F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0$$

e ponendo poi $(x,y) = (0,0)$ si ottiene, ricordando che $f(0,0) = 0 = f_y(0,0)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\big[F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\big]_{(x,y)=(0,0)} \\
&= F_{yy}(0,0,0) + F_{yz}(0,0,0)f_y(0,0) \\
&\quad + \big[F_{yz}(0,0,0) + F_{zz}(0,0,0)f_y(0,0)\big]f_y(0,0) + F_z(0,0,0)f_{yy}(0,0) \\
&= F_{yy}(0,0,0) + F_z(0,0,0)f_{yy}(0,0),
\end{aligned}$$

da cui

$$f_{yy}(0,0) = -\frac{F_{yy}(0,0,0)}{F_z(0,0)} = \frac{1}{2}F_{yy}(0,0,0).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x,y,z) &= 2\cos x - x\sin x - \int_0^z \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt \quad\Rightarrow\quad F_{xx}(0,0,0) = 2, \\
F_{xy}(x,y,z) &= -\int_0^z \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt \quad\Rightarrow\quad F_{xy}(0,0,0) = 0, \\
F_{yy}(x,y,z) &= 2\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^2} - \int_0^z \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{e^{-t^2(x^2+y^2)}}{1+tz^2}\right]dt \quad\Rightarrow\quad F_{yy}(0,0,0) = 2,
\end{aligned}$$

e pertanto l'hessiana di $f$ in $(0,0)$ risulta essere

$$D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che implica chiaramente che $(0,0)$ è un punto di minimo locale per $f$.

**2.** Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{2y}{x^\alpha(y^2-1)},$$

determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali essa risulta sommabile nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$, e calcolare poi $\int_D f(x,y)dxdy$ per $\alpha = 2$.

*Soluzione.* Poichè il denominatore della funzione $f$ si annulla per $y = \pm 1$ e, se $\alpha > 0$, per $x = 0$, la funzione $f$ è continua e non positiva in $D \setminus \{(0,0),(1,1)\}$. Osservando che l'insieme $D$ si può anche scrivere come $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$ e definendo la successione crescente di insiemi (normali rispetto a $y$)

$$D_n := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \le y \le 1 - \frac{1}{n},\ y \le x \le 1\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

sui quali $f$ è continua e limitata e la cui unione è tutto $D$, si ha che $f$ è sommabile in $D$ se e solo se esiste finito $\lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$. Si ha allora, per $\alpha \ne 1$,

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\,\frac{2y}{y^2-1}\int_y^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\,\frac{2y(1-y^{1-\alpha})}{y^2-1},$$

da cui si vede che $f$ è sommabile su $D$ se e solo se la funzione di una variabile $g(y) := \frac{2y(1-y^{1-\alpha})}{y^2-1}$ è impropriamente integrabile nell'intervallo $[0,1]$. Si ha allora l'andamento asintotico per $y \to 0$

$$\frac{2y(1-y^{1-\alpha})}{y^2-1} \sim \begin{cases} -2y & \text{se } 1-\alpha > 0, \\ -\frac{2}{y^{\alpha-2}} & \text{se } 1-\alpha < 0, \end{cases}$$

e dunque per $\alpha \neq 1$ la funzione $g$ è impropriamente integrabile in un intorno di $y=0$ se e solo se $\alpha - 2 < 1$, cioè $\alpha < 3$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 1} \frac{2y(1-y^{1-\alpha})}{y^2-1} &= (t = y-1) = \lim_{t\to 0} \frac{2(t+1)(1-(1+t)^{1-\alpha})}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t\to 0} -\frac{2(1-\alpha)t + o(t)}{2t} = \alpha - 1, \end{aligned}$$

avendo usato nel penultimo passaggio lo sviluppo binomiale $(1+t)^\beta = 1+\beta t + o(t)$. Dunque poiché $g$ ha limite finito per $y \to 1$, essa è integrabile nel senso usuale (e quindi anche impropriamente) in un intorno di $y = 1$ per ogni $\alpha \neq 1$. Sia ora $\alpha = 1$. Allora

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\, \frac{2y}{y^2-1} \int_y^1 \frac{dx}{x} = -\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\, \frac{2y\log y}{y^2-1},$$

e dunque $f$ è sommabile in $D$ per $\alpha = 1$ se e solo se la funzione $h(y) = \frac{2y\log y}{y^2-1}$ è impropriamente integrabile in $[0,1]$. Avendosi allora per $y \to 0$

$$\frac{2y\log y}{y^2-1} \sim -2y\log y \to 0,$$

e

$$\lim_{y\to 1} \frac{2y\log y}{y^2-1} = (t = y-1) = \lim_{t\to 0} \frac{2(1+t)\log(1+t)}{t(t+2)} = 1,$$

si ottiene che $h$ è integrabile in senso usuale (e quindi anche impropriamente) in $[0.1]$. Si conclude che $f$ è sommabile in $D$ se e solo se $\alpha < 3$.

Per $\alpha = 2$ si ha, da quanto visto sopra,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= -\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\, \frac{2y(1-\frac{1}{y})}{y^2-1} = -\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy\, \frac{2}{y+1} \\ &= -\lim_{n\to+\infty} 2\log\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = -2\log 2. \end{aligned}$$

**3.** Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y^2z^3 + x, 2xyz^3 + y, 3xy^2z^2 + z)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

*Soluzione.* Il campo $F$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Posto inoltre $F = (P, Q, R)$ si ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 3y^2z^2 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 6xyz^2 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

e dunque $F$ è irrotazionale, e quindi conservativo. Per determinarne un potenziale $f$ calcoliamo

$$f(x,y,z) := \int P\,dx = \int (y^2z^3 + x)\,dx = xy^2z^3 + \frac{x^2}{2} + g(y,z)$$

per una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ arbitaria. Per determinarla, imponiamo

$$2xyz^3 + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) = 2xyz^3 + y$$

da cui

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = y \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = \frac{y^2}{2} + h(z) \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = xy^2z^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + h(z).$$

Infine per determinare la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imponiamo

$$3xy^2z^2 + h'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z) = 3xy^2z^2 + z,$$

da cui $h'(z) = z$ e quindi $h(z) = \frac{z^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Se ne conlcude che tutti i potenziali di $F$ sono dati da

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + c,$$

e pertanto l'integrale richiesto è

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 2\pi^2.$$

**4.** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_3, \\ y_2' = -y_2, \\ y_3' = y_1 - 2y_3, \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1. \end{cases}$$

*Soluzione.* Si potrebbe procedere secondo il metodo di soluzione generale, calcolando gli autovalori e gli autovettori (generalizzati) della matrice dei coefficienti, ma è più rapido osservare che la seconda equazione è disaccoppiata dalle altre due, e, tenendo conto del dato iniziale $y_2(0) = 1$, ha chiaramente soluzione $y_2(t) = e^{-t}$. Rimane allora da risolvere il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1' = -y_3, \\ y_3' = y_1 - 2y_3, \\ y_1(0) = 2, y_3(0) = 1. \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice dei coefficienti si ottengono allora risolvendo

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(2+\lambda) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0,$$

che ha dunque una sola soluzione $\lambda = -1$ di molteplicità algebrica 2 (e geometrica necessariamente pari a 1, altrimenti la matrice dei coefficienti sarebbe $A = -\mathbb{1}$). Ne segue, come visto a lezione, che la matrice

$$N := A - \lambda\mathbb{1} = A + \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

è tale che $N^2 = 0$, e pertanto

$$e^{tA} = e^{-t}e^{tN} = e^{-t}(\mathbb{1} + tN) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}.$$

La soluzione del sistema $(*)$ è pertanto

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 2+t \\ 1+t \end{bmatrix},$$

e la soluzione del problema di Cauchy dato è quindi

$$y(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{bmatrix}.$$