ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2020-21
PROVA SCRITTA DEL 15/2/2021

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ y^2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Per teoremi generali, la funzione considerata è sicuramente continua, derivabile e differenziabile in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\}$.

Studiamo la continuità in $\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(0, y_0) \,:\, y_0 \in \mathbb{R}\}$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ si ha, usando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{y^2 \sin x}{x} = y_0^2 = f(0,y_0),$$

e chiaramente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x= 0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 = y_0^2 = f(0,y_0),$$

e pertanto f è continua anche in $\mathbb{R}^2 \setminus A$, ed è quindi continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

Per quanto riguarda la derivabilità in $\mathbb{R}^2 \setminus A$, si ha, per ogni $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(y^2 \frac{\sin h}{h} - y^2 \right) \\ &= \lim_{h\to 0} y^2 \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} y^2 \frac{o(h^2)}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

avendo usato l'espansione di Taylor $\sin h = h + o(h^2)$, e chiaramente

$$f_y(0,y) = \frac{d}{dy} y^2 = 2y,$$

poiché incrementando solo la y basta considerare la restrizione di f all'asse y, che è la funzione di una variabile $y \mapsto y^2$. Si conclude che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$, con derivate parziali

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y^2 \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 2y, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Infine per studiare la differenziabilità in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f_x(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \frac{x(1 + o(x)) - (x + o(x^2))}{x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \frac{o(x^2)}{x^2} = 0 = f(0,y_0), \end{aligned}$$

e chiaramente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x= 0}} f_x(x,y) = 0 = f(0,y_0),$$

e dunque f_x è continua nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Analogamente si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 2y \frac{\sin x}{x} = 2y_0 = f_y(0,y_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x= 0}} f_y(x,y),$$

e pertanto anche f_y è continua nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Si conclude che f è di classe C^1 in tali punti, ed è quindi differenziabile per il teorema del differenziale totale.

2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{|(\sqrt{2}+1)x + y|| - x + (\sqrt{2}+1)y|}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$, e calcolare, se convergente, $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$ per $\alpha = 3$.
Soluzione. La funzione f è non negativa e continua su tutto $\mathbb{R}^2$, poiché se $\alpha > 0$ il suo denominatore non si annulla mai. Dunque f è sommabile se e solo se

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint_{F_n} f(x,y)\,dxdy < +\infty,$$

dove $\{F_n\}$ è una successione crescente di insiemi misurabili limitati di $\mathbb{R}^2$ che includa definitivamente ogni insieme misurabile limitato di $\mathbb{R}^2$. Data inoltre la forma della funzione, e in particolare del suo denominatore, conviene scegliere $F_n = B_n(0,0)$, la palla aperta di centro l'origine e raggio $n \in \mathbb{N}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
I_n := &\iint_{B_n(0,0)} \frac{|(\sqrt{2}+1)x + y|| - x + (\sqrt{2}+1)y|}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dxdy \\
&= \int_0^n dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha} \int_0^{2\pi} |((\sqrt{2}+1)\cos\theta + \sin\theta)(-\cos\theta + (\sqrt{2}+1)\sin\theta)| \\
&\le 2\pi(\sqrt{2}+2)^2 \int_0^n dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha},
\end{aligned}$$

e poiché allora $\{I_n\}$ è una successione crescente (essendo $f \ge 0$), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} I_n \le \lim_{n\to+\infty} 2\pi(\sqrt{2}+2)^2 \int_0^n dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha} = 2\pi(\sqrt{2}+2)^2 \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha}.$$

D'altra parte poiché $\frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha} \sim \frac{1}{r^{2\alpha-3}}$ per $r \to +\infty$, si ha che

$$\int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^\alpha} < +\infty$$

se e solo se $2\alpha - 3 > 1$, cioè $\alpha > 2$.

Sia allora $\alpha = 3$. Si ha, per quanto visto sopra,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|(\sqrt{2}+1)x + y|| - x + (\sqrt{2}+1)y|}{(1+x^2+y^2)^3} dxdy \\
&\quad = \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^3} \int_0^{2\pi} |((\sqrt{2}+1)\cos\theta + \sin\theta)(-\cos\theta + (\sqrt{2}+1)\sin\theta)|.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^3}{(1+r^2)^3} &= (t = r^2) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dt\, \frac{t}{(1+t)^3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dt\, \frac{t+1-1}{(1+t)^3} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dt\, \left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^{+\infty}\right\} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale in θ osserviamo che

$$\begin{aligned}
&((\sqrt{2}+1)\cos\theta + \sin\theta)(-\cos\theta + (\sqrt{2}+1)\sin\theta) \\
&\quad = -(\sqrt{2}+1)\cos^2\theta + [(\sqrt{2}+1)^2 - 1]\sin\theta\cos\theta + (\sqrt{2}+1)^2\sin^2\theta \\
&\quad = (\sqrt{2}+1)(-\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) \\
&\quad = (\sqrt{2}+1)(\sin 2\theta - \cos 2\theta) = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\right) \\
&\quad = (2+\sqrt{2})\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right),
\end{aligned}$$

e pertanto l'integrale in θ è pari a

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\theta &= \left(\varphi=2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{4\pi-\frac{\pi}{4}}|\sin\varphi|\,d\varphi\\
&=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{4\pi}|\sin\varphi|\,d\varphi\\
&=4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=8\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),
\end{aligned}
$$

dove nella seconda uguaglianza si è usato il fatto che essendo $\varphi\mapsto|\sin\varphi|$ 2π-periodica, i suoi integrali su un qualunque intervallo di lunghezza 4π sono uguali, e nella terza uguaglianza il fatto che gli integrali di $|\sin\varphi|$ sugli intervalli $[\pi,2\pi]$, $[2\pi,3\pi]$ e $[3\pi,4\pi]$ coincidono tutti con quello sull'intervallo $[0,\pi]$, dove $|\sin\varphi|=\sin\varphi$. In conclusione,

$$
\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|(\sqrt{2}+1)x+y||-x+(\sqrt{2}+1)y|}{(1+x^2+y^2)^3}dxdy=2+\sqrt{2}.
$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma\langle F,ds\rangle$, dove F è il campo vettoriale

$$
F(x,y,z)=\big(y^2+e^{-x^2}\cos(xz^2),e^{-y^2}\sin y,x^2+e^{-z^2}\cos(y^2z)\big)
$$

e γ una curva con sostegno

$$
\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=\tfrac{3}{2},\,z=x+1\right\},
$$

orientata in maniera tale che la sua proiezione sul piano x,y sia percorsa in senso antiorario.
Soluzione. In base al teorema di Stokes, l'integrale richiesto si può calcolare come

$$
\int_\gamma\langle F,ds\rangle=\iint_\Sigma\langle\operatorname{rot}F,n^+\rangle\,dS,
$$

dove Σ è una qualunque superficie regolare orientata (dal campo di versori normali n^+) tale che $\partial\Sigma=\Gamma$ con orientazioni positive coincidenti. Poiché allora Γ è l'intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}$ con il piano di equazione $z=x+1$, conviene scegliere come Σ la porzione di tale piano contenuta all'interno della sfera:

$$
\begin{aligned}
\Sigma&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\le\tfrac{3}{2},\,z=x+1\right\}\\
&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(x+1)^2\le\tfrac{3}{2},\,z=x+1\right\}\\
&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2(x+\tfrac{1}{2})^2+y^2\le1,\,z=x+1\right\}.
\end{aligned}
$$

Dunque Σ è la superficie cartesiana di equazione $z=x+1$ definita nell'insieme $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,2(x+\frac{1}{2})^2+y^2\le1\}$ (proiezione di Σ sul piano x,y), e pertanto il suo versore normale è

$$
n^+=\frac{(-\partial_xz,-\partial_yz,1)}{\|(-\partial_xz,-\partial_yz,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)
$$

che ha terza componente positiva, e quindi induce su $\partial\Sigma=\Gamma$ l'orientazione fissata dal testo. Inoltre si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}F&=\det\begin{bmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ y^2+e^{-x^2}\cos(xz^2)&e^{-y^2}\sin y&x^2+e^{-z^2}\cos(y^2z)\end{bmatrix}\\
&=(-2yze^{-z^2}\sin(y^2z),*,-2y),
\end{aligned}
$$

dove la seconda componente di $\operatorname{rot}F$ non è stata calcolata in quanto non interviene nel prodotto scalare $\langle\operatorname{rot}F,n^+\rangle$, poiché $n_y^+=0$. Si conclude che l'integrale richiesto è

$$
\int_\gamma\langle F,ds\rangle=\iint_\Sigma\langle\operatorname{rot}F,n^+\rangle\,dS=\iint_D2y[ze^{-(x+1)^2}\sin(y^2(x+1))-1]\,dxdy=0,
$$

poiché la funzione integranda è dispari e D è invariante per $y\mapsto-y$.

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

(a) verificare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la matrice $N := A - \lambda\mathbb{1}$ soddisfi $N^3 = 0$ (sugg.: trovare gli autovalori di A);

(b) determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti $y' = Ay$.

Soluzione. (a) Sviluppando il determinante lungo l'ultima colonna, si ha

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^4, \end{aligned}$$

e dunque A ha l'unico autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica $n = 4$. Posto allora

$$N := A - 2\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si calcola facilmente che

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N^3 = 0.$$

(b) Come visto a lezione, da $A = 2\mathbb{1} + N$ con $N^3 = 0$ segue

$$e^{tA} = e^{2t}\left[\mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right] = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & t + \frac{t^2}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

e dunque l'integrale generale del sistema considerato è

$$y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_3 t \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 + (c_1 + c_3)t + c_3\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$