

ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA

A.A. 2020-21

PROVA SCRITTA DEL 22/1/2021

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$

se ne determinino:

- (a) gli eventuali punti stazionari in $\mathbb{R}^2$, e la loro natura;
- (b) il massimo e il minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$, se esistono;
- (c) il massimo e il minimo assoluti nell'insieme $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$, se esistono;
- (d) il massimo e il minimo assoluti nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\pi}y^2 \leq x \leq \pi, y \geq 0\}$, se esistono.

Soluzione. (a) Osserviamo per iniziare che la funzione data è periodica di periodo 2π in entrambe le variabili, cioè $f(x + 2\pi, y) = f(x, y)$, $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pertanto è sufficiente studiarne i punti stazionari nel quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, che sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \cos x + \cos(x + y) = 0, \\ f_y(x, y) = \cos y + \cos(x + y) = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Sottraendo le due equazioni, si trova l'equazione $\cos x = \cos y$, che ha come soluzioni, in $[0, 2\pi]$, $y = x$, $y = 2\pi - x$. Sostituendo la prima di queste soluzioni nella prima equazione del sistema diventa

$$\cos x + \cos(2x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\cos x$. Le soluzioni sono pertanto

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \\ -1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = x = \begin{cases} \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \\ \pi. \end{cases}$$

Sostituendo invece $y = 2\pi - x$ nella prima equazione si ottiene

$$\cos x + \cos(x + 2\pi - x) = \cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi, y = 2\pi - x = \pi.$$

Dunque i punti stazionari di f in $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ sono $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, (π, π) . Per studiarne la natura, calcoliamo l'hessiana di f :

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin x - \sin(x + y) & -\sin(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin y - \sin(x + y) \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det D^2 f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3 - \frac{3}{4} > 0, \\ \text{tr } D^2 f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0, \end{cases}$$

e dunque i punti stazionari (in $\mathbb{R}^2$) $(\frac{\pi}{3} + 2h\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo relativo. Analogamente

$$D^2 f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det D^2 f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = 3 - \frac{3}{4} > 0, \\ \text{tr } D^2 f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0, \end{cases}$$

e pertanto i punti stazionari (in $\mathbb{R}^2$) $(\frac{5\pi}{3} + 2h\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo relativo. Infine chiaramente $D^2 f(\pi, \pi) = 0$ (matrice nulla) è semidefinita, e quindi non dà informazioni circa la natura del punto stazionario (π, π) . Per studiarla, osserviamo che $f(\pi, \pi) = 0$, e consideriamo allora la restrizione di f alla retta $y = x$ nell'intorno del punto (π, π) :

$$f(\pi + t, \pi + t) = 2\sin(\pi + t) + \sin(2\pi + 2t) = -2\sin t + \sin 2t = 2\sin t(\cos t - 1).$$

Poiché $\cos t - 1 \leq 0$, tale funzione ha lo stesso segno di $-\sin t$, che cambia segno in un intorno di $t = 0$. Si conclude allora che i punti stazionari $(\pi + 2h\pi, \pi + 2k\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$, sono punti di sella.

(b) Anche in questo caso, grazie alla periodicità di f , il massimo e il minimo assoluti di f su $\mathbb{R}^2$ coincidono con quelli su $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, che, essendo tale insieme compatto, esistono per il teorema di Weierstrass. Pertanto, in base a quanto visto al punto precedente,

$$\max_{\mathbb{R}^2} f = \max_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} f = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} f = f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(c) L'insieme D è compatto, e dunque $\max_D f$, $\min_D f$ esistono per il teorema di Weierstrass. Poiché inoltre $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, che come visto sopra è il punto di massimo assoluto di f su $\mathbb{R}^2$, appartiene a D , si ha chiaramente $\max_D f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Poiché invece il punto di minimo assoluto $(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}) \notin D$, il punto di minimo di f su D deve trovarsi sulla frontiera ∂D di D . Le restrizioni di f ai lati di ∂D sono:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 2 \sin x, \quad x \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad \min_{x \in [0, \pi]} f(x, 0) = f(0, 0) = f(\pi, 0) = 0, \\ f(\pi, y) &= \sin y + \sin(\pi + y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \\ f(x, \pi) &= \sin x + \sin(x + \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ f(0, y) &= 2 \sin y, \quad y \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad \min_{y \in [0, \pi]} f(0, y) = f(0, 0) = f(0, \pi) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto $\min_D f = 0$.

(d) Di nuovo E è compatto, e dunque $\max_E f$, $\min_E f$ esistono per il teorema di Weierstrass, e $\max_E f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ poiché $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \in E$ (in quanto $\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{3})^2 = \frac{\pi}{9} \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$). Inoltre, $E \subset D$, e per quanto visto nel punto precedente, $\min_D f = 0$, e pertanto $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in D$, e quindi anche per ogni $(x, y) \in E$. Essendo allora come visto sopra $f(0, 0) = 0$, si conclude che $\min_E f = 0$.

2. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_E \frac{xz}{x^2 + (y-1)^2} dx dy dz,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, x \geq 0\}$. (Suggerimento: per il calcolo finale, può essere utile sapere che $\int_{-1}^1 dt (t^2 + 2)^{3/2} = 3\sqrt{3} + \frac{3}{2} \log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$.)

Soluzione. [A rigore, l'integrale dato è improprio, in quanto la funzione integranda diverge nei punti $(0, 1, z) \in E$, ma visto che il testo non lo segnala, e che la funzione risulta sommabile E , procederemo come se si trattasse dell'integrale di una funzione limitata.] Le espressioni della funzione integranda e dell'insieme di integrazione suggeriscono di usare coordinate cilindriche centrate nel punto $(0, 1, 0)$, $x = r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, $z = z$. L'insieme E si trasforma allora nell'insieme

$$D := \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : r^2 + 2r \sin \theta + 1 + z^2 \leq 2, z \geq r, r \cos \theta \geq 0\}.$$

Si ha allora

$$r^2 + 2r \sin \theta + 1 + z^2 \leq 2, z \geq r \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \leq z^2 \leq 1 - r^2 - 2r \sin \theta$$

il che implica, tenendo conto che $r \geq 0$,

$$r^2 \leq 1 - r^2 - 2r \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2 + 2r \sin \theta - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r \leq g(\sin \theta),$$

dove $g(t) := \frac{\sqrt{t^2 + 2} - t}{2}$. Essendo poi $r \cos \theta \geq 0$ equivalente a $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, l'insieme D si può riscrivere come

$$D = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq g(\sin \theta), r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2 - 2r \sin \theta}\}$$

(notare che da $r^2 \leq 1 - r^2 - 2r \sin \theta$ segue che l'argomento della radice è non negativo), che è normale rispetto al piano r, θ , e la sua proiezione su questo piano è normale rispetto all'asse θ .

Dunque, in base alle formule di riduzione, l'integrale dato è pari a

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{g(\sin \theta)} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2-2r\sin \theta}} dz r \frac{zr \cos \theta}{r^2} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^{g(\sin \theta)} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2-2r\sin \theta}} dz z \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^{g(\sin \theta)} dr (1 - 2r^2 - 2r \sin \theta) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \left[g(\sin \theta) - \frac{2}{3} g(\sin \theta)^3 - g(\sin \theta)^2 \sin \theta \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{\sqrt{t^2+2}-t}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{t^2+2}-t}{2} \right)^3 - t \left(\frac{\sqrt{t^2+2}-t}{2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t + \sqrt{t^2+2} - \frac{1}{6} (t^2+2)^{3/2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt \sqrt{t^2+2} - \frac{1}{24} \int_{-1}^1 dt (t^2+2)^{3/2},
\end{aligned}$$

dove nella terza uguaglianza si è usato il cambiamento di variabile $t = \sin \theta$, e nell'ultima il fatto che $\int_{-1}^1 dt t = \int_{-1}^1 dt t^3 = 0$ per parità. Si ha poi, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dt (t^2+2)^{3/2} &= [t(t^2+2)]_{-1}^1 - 3 \int_{-1}^1 dt t^2 \sqrt{t^2+2} \\
&= 2 \cdot 3^{3/2} - 3 \int_{-1}^1 dt (t^2+2)^{3/2} + 6 \int_{-1}^1 dt \sqrt{t^2+2},
\end{aligned}$$

da cui, usando il suggerimento dato nel testo,

$$\int_{-1}^1 dt \sqrt{t^2+2} = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 dt (t^2+2)^{3/2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + \log \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right).$$

In conclusione, usando ancora una volta il suggerimento, l'integrale cercato è

$$\iiint_E \frac{xz}{x^2+(y-1)^2} dx dy dz = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt \sqrt{t^2+2} - \frac{1}{24} \int_{-1}^1 dt (t^2+2)^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{16} \log \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right).$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

sulla frontiera dell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$, orientata positivamente.

Soluzione. Il campo dato si può decomporre come $F = F_1 + F_2$, dove

$$F_1(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right), \quad F_2(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right),$$

entrambi definiti su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non semplicemente connesso. Come visto a lezione F_1 è irrotazionale (ma non conservativo). Inoltre essendo

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right),$$

si vede che anche F_2 è irrotazionale, e dunque tale è anche $F = F_1 + F_2$. Data allora la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, omotopa a $+\partial D$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, si ha, per l'invarianza omotopica dell'integrale di un campo irrotazionale,

$$\int_{+\partial D} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma} \langle F_1, ds \rangle + \int_{\gamma} \langle F_2, ds \rangle.$$

Inoltre, come visto a lezione, $\int_{\gamma} \langle F_1, ds \rangle = 2\pi$, mentre, in base alla definizione,

$$\int_{\gamma} \langle F_2, ds \rangle = \int_0^{2\pi} dt \frac{\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 0.$$

E pertanto $\int_{+\partial D} \langle F, ds \rangle = 2\pi$.

4. Sia data la superficie Σ generata dalla rotazione completa attorno all'asse z della curva di equazione $z = x^3$, $x \in [0, 1]$, contenuta nel piano xz . Si calcolino il volume dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ delimitato da Σ e dal piano di equazione $z = 1$, e il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (2z, 3y, 0)$ attraverso Σ , orientata in modo che la normale positiva nel punto $(0, 0, 0)$ sia $n_+ = (0, 0, -1)$.

Soluzione. Poiché $z = x^3$ equivale a $x = z^{1/3}$, sezionando l'insieme E con un piano parallelo al piano x, y si ottiene un disco di raggio $z^{1/3}$ centrato sull'asse z , e dunque l'insieme E si può scrivere come

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^{2/3}\},$$

che è un insieme normale rispetto all'asse z . Integrando allora per strati si ottiene

$$|E| = \iiint_E dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\{x^2+y^2 \leq z^{2/3}\}} dx dy = \pi \int_0^1 dz z^{2/3} = \frac{3}{5} \pi [z^{5/3}]_0^1 = \frac{3}{5} \pi.$$

Si ha inoltre $\partial E = \Sigma \cup \Sigma_0$ dove

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è il disco unitario contenuto nel piano $z = 1$ e centrato sull'asse z . Il suo versore normale uscente da E è $n_0^+ = (0, 0, 1)$. Considerando allora che anche l'orientazione di Σ definita nel testo è quella uscente da E si ha, per il teorema della divergenza,

$$\iiint_E \operatorname{div} F dx dy dz = \iint_{\Sigma} \langle F, n_+ \rangle dS + \iint_{\Sigma_0} \langle F, n_0^+ \rangle dS.$$

Essendo allora chiaramente $\operatorname{div} F = 3$ e $\langle F, n_0^+ \rangle = 0$, si conclude che il flusso richiesto è

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n_+ \rangle dS = \iiint_E 3 dx dy dz = 3|E| = \frac{9}{5} \pi.$$