ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA A.A. 2019-20 NOTE SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

G. MORSELLA

1. Teoremi generali

Un *sistema di equazioni differenziali del I ordine* è un sistema della forma

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ F_2(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ \quad \vdots \\ F_n(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $F_j : (a,b) \times A \times B \to \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ aperti, $j = 1, \dots, n$, sono funzioni (scalari) continue, e $y_j : I \to \mathbb{R}$, $I \subset (a,b)$ intervallo, $j = 1, \dots, n$, sono funzioni (scalari) di classe C^1. Ovviamente, definendo le funzioni vettoriali $F = (F_1, \dots, F_n) : (a,b) \times A \times B \to \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$, il sistema (1.1) si riscrive molto più compattamente come

$$F(t, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

Nel caso $n = 1$, quello cioè di una singola equazione differenziale del I ordine, è noto che genericamente la soluzione dipende da una costante di integrazione arbitraria. Analogamente, la soluzione generale di un sistema di n equazioni del primo ordine dipende da n costanti arbitarie. Più precisamente, diremo che una funzione (vettoriale) $y : I \times C \to \mathbb{R}^n$, con $I \subset (a,b)$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ aperto, è un *integrale generale* del sistema (1.2), se per ogni $t_0 \in I$ e ogni $y_0 \in A$ esiste $c_0 \in C$ tale che la funzione $t \mapsto y(t, c_0)$ è soluzione di (1.2) e soddisfa la condizione iniziale $y(t_0, c_0) = y_0$. Dunque i punti $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$ svolgono il ruolo di n costanti arbitrarie la cui scelta permette di imporre condizioni iniziali alla soluzione.

Noi considereremo pressoché esclusivamente sistemi in cui la (1.2) permette di esplicitare globalmente y' in funzione di (t, y), come precisato nella definizione seguente.

Definizione 1.1. Il sistema (1.2) si dice *in forma normale* se $B = \mathbb{R}^n$ ed esiste $f : (a,b) \times A \to \mathbb{R}^n$ tale che $F(t, y, y') = y' - f(t, y)$. Pertanto un *sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale* è un sistema della forma

$$y' = f(t, y), \tag{1.3}$$

o, scritto più esplicitamente,

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Come nel caso di equazioni scalari (cioè per $n = 1$), un *problema di Cauchy* associato al sistema (1.3) consiste nel determinarne una soluzione che soddisfi una data condizione iniziale:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

dove $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$.

Esempi 1.2. (a) Si consideri nel caso $n = 1$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

che corrisponde alla funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t, y) = y^{1/3}$. Separando le variabili, si ottiene

$$\frac{3}{2} y^{2/3} = \int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int dt = t + c,$$

e dunque un'integrale generale dell'equazione $y' = y^{1/3}$ è dato da $y(t,c) = \left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^{3/2}$, $t+c \geq 0$. Imponendo la condizione iniziale $0 = y(0,c) = \left(\frac{2}{3}c\right)^{3/2}$ si trova $c = 0$, e dunque una soluzione del problema di Cauchy dato è $y(t) = y(t,0) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$, definita per $t \geq 0$. D'altra parte chiaramente la funzione $\tilde{y}(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, è anche soluzione dello stesso problema di Cauchy (in quanto $\tilde{y}' = 0 = \tilde{y}^{1/3}$), e raccordando tale soluzione con una di quelle ottenute dall'integrale generale determinato sopra, si ottengono le infinite soluzioni

$$y_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -c, \\ \left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^{3/2}, & t > -c. \end{cases}$$

per ogni $c \leq 0$.

(b) Si consideri, sempre per $n = 1$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Anche in questo caso l'equazione è a variabili separabili:

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int dt = t + c,$$

ed imponendo la condizione iniziale si trova la soluzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$ definita nell'intervallo $(-\infty, 1)$. Si vede dunque che sebbene il secondo membro dell'equazione differenziale, $f(t,y) = y^2$, sia definito per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy considerato è definita solo localmente, cioè in un intervallo strettamente contenuto in quello in cui è definita l'equazione differenziale. Ovviamente la soluzione appena trovata è definita anche in $(1, +\infty)$, ma per definizione la soluzione di un'equazione differenziale è definita in un intervallo, e d'altra parte è chiaro che il valore della soluzione in $(1, +\infty)$ non è determinato dalla condizione iniziale imposta a $t = 0$, che non fa parte di tale intervallo.

I due esempi considerati mostrano che in generale la soluzione di un problema di Cauchy non è unica, o non è definita globalmente, cioè in tutto l'intervallo (a,b) in cui è definita l'equazione differenziale. Sorge allora il problema di determinare condizioni aggiuntive sull'equazione, cioè sulla funzione f, che garantiscano l'unicità e/o l'esistenza globale delle soluzioni dei problemi di Cauchy associati. A tal fine introduciamo la seguente nozione.

Definizione 1.3. La funzione $f : (a,b) \times A \to \mathbb{R}^n$ si dice *localmente lypschitziana* in y se per ogni compatto $K \subset (a,b) \times A$ esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in K.$$

Inoltre f è detta *globalmente lypschitziana* in y se esiste $L > 0$ tale che

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in (a,b) \times A.$$

Normalmente la lypschitzianità di una funzione non si verifica usando direttamente la definizione, ma piuttosto usando la condizione, piuttosto comoda, fornita dal seguente risultato.

Proposizione 1.4. *Se le derivate $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $j,k = 1,\dots,n$, esistono e sono continue in $(a,b) \times A$ allora f è localmente lypschitziana. Se inoltre $\sup_{(t,y)\in(a,b)\times A} |\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t,y)| < +\infty$ per ogni $j,k = 1,\dots,n$, allora f è globalmente lypschitziana.*

Dimostrazione. Dato un compatto $K \subset (a,b) \times A$, e dati $(t,y_1),(t,y_2) \in K$, grazie al teorema del valor medio esiste, per ogni $j = 1,\dots,n$, un punto $\bar{y}_j \in (y_1,y_2)$ (segmento aperto di estremi y_1, y_2), tale che

$$|f_j(t,y_1) - f_j(t,y_2)| = |\langle \nabla f_j(t,\bar{y}_j), y_1 - y_2 \rangle| \leq \|\nabla f_j(t,\bar{y}_j)\| \|y_1 - y_2\| \leq \max_{(t,y)\in K} \|\nabla f_j(t,y)\| \|y_1 - y_2\|,$$

dove nella prima disuguaglianza si è usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e nella seconda il teorema di Weierstrass, che garantisce l'esistenza di $\max_{(t,y)\in K} \|\nabla f_j(t,y)\|$. Pertanto

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| = \left[\sum_{j=1}^n |f_j(t,y_1) - f_j(t,y_2)|^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{j=1}^n \max_{(t,y)\in K} \|\nabla f_j(t,y)\|^2\right]^{1/2} \|y_1 - y_2\|,$$

e si ottiene dunque la lypschitzianità locale di f ponendo $L_K := \left[\sum_{j=1}^n \max_{(t,y)\in K} \|\nabla f_j(t,y)\|^2\right]^{1/2}$. Analogamente se $\sup_{(t,y)\in(a,b)\times A} |\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t,y)| < +\infty$ per ogni $j,k = 1,\dots,n$ si ottiene la lypschitzianità globale con $L := \left[\sum_{j=1}^n \sup_{(t,y)\in(a,b)\times A} \|\nabla f_j(t,y)\|^2\right]^{1/2}$. □

Il fatto che la lypschitzianità locale, risp. globale, garantisca l'esistenze e l'unicità locale, risp. globale, delle soluzioni del problema di Cauchy (1.4) è il contenuto del seguente fondamentale risultato.

Teorema 1.5 (di esistenza e unicità di Cauchy-Lypschitz). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : (a,b) \times A \to \mathbb{R}^n$. Allora:*
(i) (esistenza locale) se f è localmente lypschitziana, per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esistono un intervallo $I \subset (a,b)$ tale che $t_0 \in I$, ed una funzione $y : I \to A$ soluzione del problema di Cauchy (1.4)*;*
(ii) (unicità locale) se f e y sono come in (i) e se $\tilde{y} : J \to A$ è una soluzione di (1.4)*, allora $y(t) = \tilde{y}(t)$ per ogni $t \in I \cap J$;*
(iii) (esistenza e unicità globali) se $A = \mathbb{R}^n$ e f è globalmente lypschitziana, per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esiste un'unica $y : (a,b) \to A$ soluzione di (1.4)*.*

Grazie all'unicità, è possibile prolungare le soluzioni locali di (1.4): se infatti $y : I \to A$ è una tale soluzione, preso $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, si può considerare la soluzione $\tilde{y} : J \to A$ del problema di Cauchy con condizione iniziale $\tilde{y}(t_1) = y(t_1)$, e per il teorema di unicità si avrà $\tilde{y}(t) = y(t)$ per ogni $t \in I \cap J$, e si ottiene dunque una soluzione definita in tutto l'intervallo $I \cup J$, possibilmente più grande dell'intervallo di partenza I. Iterando questo procedimento si ottengono le cosiddette soluzioni massimali di (1.4), come precisato dal seguente teorema.

Teorema 1.6 (di esistenza di soluzioni massimali). *Sia $f : (a,b) \times A \to \mathbb{R}^n$ localmente lypschitziana. Allora per ogni $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in A$, esiste una soluzione $y : (\alpha,\beta) \to A$ di* (1.4) *tale che per ogni compatto $K \subset A$:*
(i) se $\beta < b$, si ha $y(t) \notin K$ definitivamente per $t \to \beta^-$;
(ii) se $\alpha > a$, si ha $y(t) \notin K$ definitivamente per $t \to \alpha^+$.
Tale soluzione è detta soluzione massimale *di* (1.4).

Dunque una soluzione massimale, se non è definita in tutto (a,b), esce definitivamente (agli estremi del suo intervallo di definizione) dai compatti contenuti in A, il che implica che tende all'infinito, o alla frontiera di A, e dunque non è ulteriormente prolungabile usando il metodo descritto sopra. Questa proprietà delle soluzioni massimali fornisce anche un metodo per stabilire se sono definite in tutto (a,b) senza calcolarle esplicitamente, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 1.7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La funzione $f(t,y) = 1 - y^2$ è definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e la sua derivata $\partial_y f(t,y) = -2y$ è ovviamente continua in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e dunque per la proposizione 1.4 f è localmente lypschitziana, e ogni problema di Cauchy associato all'equazione $y' = 1 - y^2$ ammette quindi esistenza e unicità locali. Tuttavia $\partial_y f(t,y)$ non è limitata, quindi la condizione sufficiente per la lypschitzianità globale della proposizione 1.4 non è soddisfatta, e si può in effetti verificare che f non è globalmente lypschitziana. Ciò nonostante, il fatto che la soluzione massimale $y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy considerato è definita globalmente, cioè $(\alpha,\beta) = \mathbb{R}$, si può dimostrare, senza calcolarla esplicitamente, osservando che l'equazione $y' = 1 - y^2$ ha le due soluzioni ovvie $y_\pm(t) = \pm 1$, $t \in \mathbb{R}$, e che pertanto, per unicità, si ha $y(t) \in (-1,1)$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$ (se, per assurdo, ad esempio esistesse $t \in (\alpha,\beta)$ tale che $y(t) = 1$ allora il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t) = 1$ avrebbe due soluzioni, y e y_+). Pertanto la soluzione y non esce mai dal compatto $[-1,1]$, e dunque, per il teorema precedente, è definita su tutto $\mathbb{R}$. In realtà in questo caso è facile risolvere esplicitamente il problema di Cauchy dato per separazione di variabili:

$$t + c = \int dt = \int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int dy \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-y}{1+y}\right|,$$

da cui, imponendo anche la condizione iniziale,

$$\left|\frac{1-y(t)}{1+y(t)}\right| = e^{2t}.$$

Inoltre poiché l'argomento del modulo è positivo per $t = 0$ (vale 1), e poiché $y(t) \neq \pm 1$ come visto sopra, si avrà $\frac{1-y(t)}{1+y(t)} > 0$ per ogni t, e pertanto, eliminando il modulo e risolvendo per $y(t)$,

$$y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

ovviamente definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, come previsto.

2. Sistemi lineari

Il sistema (1.3) è detto un *sistema lineare di equazioni differenziali del primo ordine* se è della forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ \quad \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{cases}$$

dove $a_{jk}, b_j : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $j, k = 1, \dots, n$, sono funzioni continue e limitate. Ovviamente definendo la matrice $n \times n$ dipendente da t

$$A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

e il vettore $b(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t))$, il sistema precedente si scrive in forma compatta

$$y' = A(t)y + b(t). \tag{2.1}$$

Inoltre il sistema che si ottiene nel caso particolare $b(t) = 0$,

$$y' = A(t)y, \tag{2.2}$$

è detto il *sistema lineare omogeneo* associato al sistema (2.1).

Proposizione 2.1. *Dati comunque $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

ammette un'unica soluzione globale $y : I \to \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Indicato con $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ il secondo membro del sistema (2.1), l'asserto segue immediatamente dalla proposizione 1.4 e dal punto (iii) del teorema di esistenza e unicità, in quanto

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(t, y) = a_{jk}(t)$$

è per ipotesi una funzione continua e limitata in $I \times \mathbb{R}^n$, e dunque f è globalmente lypschitziana. $\square$

Concentriamoci per il momento sul sistema omogeneo (2.2). La linearità del sistema comporta una struttura piuttosto semplice dell'insieme

$$S := \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \, : \, y \text{ è soluzione di (2.2)}\}$$

delle sue soluzioni, come mostreremo a breve. A tale scopo, premettiamo una definizione che è un caso particolare della ben nota nozione di indipendenza lineare in uno spazio vettoriale.

Definizione 2.2. Le funzioni $y_1, \dots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sono linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Teorema 2.3 (struttura dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo)**.** *L'insieme S delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* (2.2) *è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ di dimensione n.*

Dimostrazione. Siano $y, z \in S$. Allora

$$\frac{d}{dt}(y+z) = y' + z' = A(t)y + A(t)z = A(t)[y+z],$$

e dunque $y + z \in S$. Analogamente se $y \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $\alpha y \in S$. Pertanto S è un sottospazio di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Sia poi $y_j \in S$, $j = 1, \ldots, n$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = e_j, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se allora $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$, ponendo $t = t_0$ si ha $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ e dunque, per l'indipendenza lineare di $e_1, \ldots, e_n$, ne segue $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, che dimostra l'indipendenza lineare delle soluzioni $y_1, \ldots, y_n \in S$. Data poi una generica soluzione $y \in S$, si potrà scrivere $y(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ per opportuni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, e dunque y è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \end{cases}$$

di cui è soluzione anche la funzione $t \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t)$, e pertanto per l'unicità $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j$. Dunque $y_1, \ldots, y_n$ è una base di S, che ha pertanto dimensione n. □

Pertanto per determinare la soluzione generale di (2.2) è sufficiente determinare n sue soluzioni linearmente indipendenti: ogni altra soluzione sarà una loro combinazione lineare. Il seguente risultato permette di decidere in maniera piuttosto semplice se una famiglia (finita) di soluzioni di (2.2) è linearmente indipendente.

Proposizione 2.4. *Siano $y_1, \ldots, y_p \in S$. Sono equivalenti:*

(i) le funzioni $y_1, \ldots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti;
(ii) per ogni $t \in I$ i vettori $y_1(t), \ldots, y_p(t) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti;
(iii) esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori $y_1(t_0), \ldots, y_p(t_0) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (i) ⇒ (ii): fissato $\bar{t} \in I$ siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j(\bar{t}) = 0,$$

e si definisca $y := \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j$. Allora essendo S uno spazio vettoriale si ha $y \in S$, che sarà quindi soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(\bar{t}) = 0, \end{cases}$$

che ha ovviamente la soluzione identicamente nulla, e dunque, per unicità, $y(t) = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$ che, per l'indipendenza lineare di $y_1, \ldots, y_p$, implica $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Dunque $y_1(\bar{t}), \ldots, y_p(\bar{t}) \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti, ed essendo $\bar{t} \in I$ arbitrario otteniamo (ii).

(ii) ⇒ (iii): ovvio.

(iii) ⇒ (i): se $\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t) = 0$ per ogni $t \in I$, ponendo $t = t_0$ si ottiene ovviamente $\sum_{j=1}^p \lambda_j y_j(t_0) = 0$, da cui, per l'indipendenza lineare di $y_1(t_0), \ldots, y_p(t_0)$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, e cioè l'indipendenza lineare di $y_1, \ldots, y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. □

Dunque per verificare se una famiglia finita di soluzioni di (2.2) è linearmente indipendente basta verificare se i loro valori in un qualunque $t_0 \in I$ sono linearmente indipendenti, e cioè che la matrice che ha per colonne tali vettori ha rango massimo. In particolare n soluzioni $y_1, \ldots, y_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $t_0 \in I$ tale che

$$\det \begin{bmatrix} y_{11}(t_0) & \ldots & y_{n1}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t_0) & \ldots & y_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Per quanto riguarda il sistema non omogeneo (2.1), analogamente al caso di una singola equazione lineare, le sue soluzioni si ottengono tutte sommando una sua soluzione fissata a una qualunque soluzione del sistema omogeneo.

Teorema 2.5. *Sia $y_p \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ una soluzione del sistema lineare non omogeneo* (2.1)*. Allora l'insieme delle soluzioni di* (2.1) *è*
$$S + y_p = \{y + y_p \,:\, y \in S\}.$$

Dimostrazione. Se $y \in S$ si ha
$$\frac{d}{dt}(y + y_p) = y' + y_p' = A(t)y + A(t)y_p + b(t) = A(t)[y + y_p] + b(t),$$
e dunque $y + y_p$ è soluzione di (2.1). Viceversa se $\tilde{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è soluzione di (2.1), allora
$$\frac{d}{dt}(\tilde{y} - y_p) = \tilde{y}' - y_p' = A(t)\tilde{y} + b(t) - A(t)y_p - b(t) = A(t)[\tilde{y} - y_p],$$
e dunque $y := \tilde{y} - y_p \in S$, e $\tilde{y} = y + y_p \in S + y_p$. □

Allo scopo di determinare la soluzione particolare y_p di (2.1) dobbiamo svolgere ancora qualche considerazione. Indichiamo con $t \mapsto y(t, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, la soluzione del problema di Cauchy (2.3) con $b(t) \equiv 0$. Si vede allora facilmente che per ogni $t \in I$ fissato, l'applicazione $\mathbb{R}^n \ni y_0 \mapsto y(t, y_0) \in \mathbb{R}^n$ è lineare: infatti dati $y_{0,1}, y_{0,2} \in \mathbb{R}^n$, la funzione $t \mapsto y(t, y_{0,1}) + y(t, y_{0,2})$ è soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y_{0,1} + y_{0,2}$, e dunque per unicità $y(t, y_{0,1} + y_{0,2}) = y(t, y_{0,1}) + y(t, y_{0,2})$ per ogni $t \in I$. Analogamente si verifica che se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $y(t, \alpha y_0) = \alpha y(t, y_0)$ per ogni $t \in I$.

Esiste dunque per ogni $t \in I$ una matrice $R(t) \in M_n(\mathbb{R})$ (spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali) tale che
$$y(t, y_0) = R(t)y_0, \qquad \forall t \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}^n.$$
Inoltre derivando questa equazione rispetto a t si ottiene, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$,
$$R'(t)y_0 = \frac{d}{dt}y(t, y_0) = A(t)y(t, y_0) = A(t)R(t)y_0,$$
e dunque la funzione a valori matrici $t \mapsto R(t)$ è soluzione dell'equazione matriciale
$$R'(t) = A(t)R(t). \tag{2.4}$$

La seguente proprietà delle soluzioni di questa equazione è una conseguenza immediata della proposizione 2.4.

Proposizione 2.6. *Sia $R \in C^1(I, M_n(\mathbb{R}))$ una soluzione di* (2.4)*. Allora esiste $t_0 \in I$ tale che $R(t_0)$ è invertibile se e solo se $R(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$.*

Dimostrazione. Poiché R risolve (2.4), la funzione $t \mapsto R(t)e_j$, $j = 1, \dots, n$, è soluzione di (2.2), e dunque per l'equivalenza (ii) ⇔ (iii) della proposizione 2.4, i vettori $R(t)e_1, \dots, R(t)e_n$ sono linearmente indipendenti per $t = t_0$ se e solo se lo sono per ogni $t \in I$. Ma poiché tali vettori non sono altro che le colonne di $R(t)$, la tesi segue dal fatto noto che una matrice è invertibile se e solo se le sue colonne sono linearmente indipendenti. □

Definizione 2.7. Una *risolvente* di (2.4) è una soluzione $R \in C^1(I, M_n(\mathbb{R}^n))$ di (2.4) tale che $R(t)$ sia invertibile per un (e quindi per ogni) $t \in I$.

Per quanto appena visto, la conoscenza di una risolvente di (2.4) equivale alla conoscenza dell'integrale generale di (2.2). Se infatti R è una risolvente di (2.4), definendo $y(t, c) := R(t)c$, $t \in I$, $c \in \mathbb{R}^n$ si ottiene l'integrale generale di (2.2), poiché dati $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha $y(t_0, R(t_0)^{-1}y_0) = y_0$. Viceversa, se $(t, c) \mapsto y(t, c)$ è l'integrale generale di (2.2), dato $t_0 \in I$ esisteranno $c_{0,j} \in \mathbb{R}^n$ tali che $y(t_0, c_{0,j}) = e_j$, $j = 1, \dots, n$, il che implica che $t \mapsto y(t, c_{0,j})$ sia la soluzione y_j di (2.2) definita nella dimostrazione del teorema 2.3 e la matrice $R(t)$ le cui colonne sono i vettori $y_j(t)$ definisce una risolvente di (2.4).

Siamo ora nella posizione di fornire un metodo per determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo a partire dall'integrale generale di quello omogeneo (o equivalentemente da una risolvente di (2.4)).

Teorema 2.8 (metodo di variazione delle costanti)**.** *Sia $R \in C^1(I, M_n(\mathbb{R}))$ una risolvente di* (2.4)*. Allora una soluzione del sistema non omogeneo* (2.1) *è data da*
$$y_p(t) = R(t)c + \int_{t_0}^{t} ds\, R(t)R(s)^{-1}b(s), \qquad t \in I,$$
per ogni scelta di $t_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}^n$ fissati.

Dimostrazione. Si potrebbe ovviamente verificare che la funzione y_p definita dalla formula dell'enunciato è una soluzione di (2.1) derivandola, ma è più istruttivo procedere al modo seguente. Supponendo di avere una soluzione y_p di (2.1), si definisca $z(t) := R(t)^{-1}y_p(t)$ per ogni $t \in I$. Moltiplicando tale equazione a sinistra per $R(t)$ si ottiene ovviamente $y_p(t) = R(t)z(t)$, e derivando rispetto a t,

$$y_p'(t) = R'(t)z(t) + R(t)z'(t) = A(t)R(t)z(t) + R(t)z'(t),$$

avendo tenuto conto del fatto che R è una risolvente di (2.4). D'altra parte se y_p è una soluzione di (2.1) si deve avere

$$y_p'(t) = A(t)y_p(t) + b(t) = A(t)R(t)z(t) + b(t).$$

Confrontando queste due equazioni si trova $R(t)z'(t) = b(t)$ o, moltiplicando a sinistra per $R(t)^{-1}$, $z'(t) = R(t)^{-1}b(t)$, che ha la soluzione ovvia

$$z(t) = c + \int_{t_0}^{t} ds\, R(s)^{-1}b(s),$$

con $c \in \mathbb{R}^n$ vettore costante arbitrario. Ricordando allora che $y_p(t) = R(t)z(t)$ si ottiene la tesi. $\square$

Il nome del teorema appena dimostrato deriva dal fatto che, come visto sopra, $(t,c) \mapsto R(t)c$ è l'integrale generale del sistema omogeneo, e dunque il metodo consiste nel cercare una soluzione del sistema non omogeneo facendo variare, cioè dipendere da t, la costante arbitraria c dell'integrale generale.

3. Sistemi lineari a coefficienti costanti

È ben noto che per $n = 1$ l'integrale generale di (2.1) è dato da

$$y(t,c) = e^{\int dt\, A(t)}\left[c + \int dt\, e^{-\int dt\, A(t)}b(t)\right].$$

Purtroppo se invece $n > 1$ non è disponibile una formula esplicita per la soluzione di (2.1) nel caso di una funzione matriciale $t \mapsto A(t)$ generica. È però possibile trovare una tale formula nel caso particolare di una matrice con coefficienti costanti, cioè indipendenti da t.

Considereremo dunque d'ora in poi il generico *sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti*, che è il caso particolare di (2.1) in cui le funzioni $t \mapsto a_{jk}(t)$ sono identicamente costanti:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(t), \\ \quad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(t), \end{cases}$$

che al solito si riscrive più compattamente in forma vettoriale

$$y' = Ay + b(t), \tag{3.1}$$

dove come nel caso generale

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad b(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t)),$$

e il cui sistema omogeneo associato è ancora

$$y' = Ay. \tag{3.2}$$

Nel caso $n = 1$, in cui la matrice A è ridotta a un numero reale, l'integrale generale di (3.2) è ovviamente dato dall'esponenziale $(t,c) \mapsto e^{tA}c$. È notevole il fatto che tale formula continua a valere anche per $n > 1$, a patto chiaramente di definire opportunamente l'esponenziale di una matrice.

A tale scopo, pur essendo la matrice A di (3.2) a coefficienti reali, risulta necessario considerare anche matrici a coefficienti complessi. Dobbiamo pertanto estendere alcune definizioni e risultati sulle serie numeriche al caso di serie a termini complessi. Data una successione $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ si dice convergente a uno $z \in \mathbb{C}$ se $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} z_k = z$, il che equivale a dire che la serie reale $\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re} z_k$ converge a $\operatorname{Re} z$ e la serie reale $\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im} z_k$ converge a $\operatorname{Im} z$. Inoltre la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ si dice assolutamente convergente se $\sum_{k=0}^{+\infty} |z_k| < +\infty$. Poiché $|\operatorname{Re} z_k| \le |z_k|$, $|\operatorname{Im} z_k| \le |z_k|$, da questo segue la convergenza (assoluta) di $\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re} z_k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im} z_k$, e quindi la convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$.

Teorema 3.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Allora la serie di matrici*

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3.3}$$

converge assolutamente coefficiente per coefficiente, cioè $e^A \in M_n(\mathbb{C})$ è per definizione la matrice con coefficienti

$$(e^A)_{ij} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{k!}$$

dove la serie a secondo membro converge assolutamente per ogni $i, j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Definiamo la norma di una generica matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ come

$$\|B\| := \sum_{i,j=1}^{n} |B_{ij}|.$$

Si ha chiaramente $|B_{ij}| \leq \|B\|$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, e data poi un'altra matrice $C \in M_n(\mathbb{C})$ si ha

$$\|B + C\| = \sum_{i,j=1}^{n} |B_{ij} + C_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |B_{ij}| + |C_{ij}| = \|B\| + \|C\|, \tag{3.4}$$

$$\|BC\| = \sum_{i,j=1}^{n} |(BC)_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{h=1}^{n} B_{ih} C_{hj} \right| \leq \sum_{i,j,h=1}^{n} |B_{ih}||C_{hj}| \leq \sum_{i,j,h,l=1}^{n} |B_{ih}||C_{lj}| = \|B\|\|C\|. \tag{3.5}$$

In base a tali disuguaglianze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|(A^k)_{ij}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|},$$

da cui la tesi. □

Dunque in base alla definizione di e^A e alla definizione di serie complessa convergente,

$$(e^A)_{ij} := \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(A^k)_{ij}}{k!},$$

e pertanto

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| e^A - \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right\| = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \left| (e^A)_{ij} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(A^k)_{ij}}{k!} \right| = 0,$$

il che equivale a dire che $e^A = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$, dove il secondo membro è il limite di una successione in $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$.

In generale l'esponenziale di una somma di matrici non è uguale al prodotto degli esponenziali, come accade per l'esponenziale di numeri reali. Questo però continua a valere se le due matrici in questione commutano (rispetto al prodotto righe per colonne).

Teorema 3.2. *Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tali che $AB = BA$. Allora $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Dimostrazione. Osserviamo per iniziare che se A e B commutano, la potenza $(A+B)^k$ si può esprimere tramite la formula del binomio di Newton:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{\substack{j,h \geq 0 \\ j+h=k}} \frac{k!}{j!h!} A^j B^h,$$

il che si dimostra allo stesso modo che per numeri reali. Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambiamento di indice $h = k - j$. Si avrà allora

$$e^{A+B} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j,h \geq 0 \\ j+h=k}} \frac{k!}{j!h!} A^j B^h = \lim_{N \to +\infty} \sum_{\substack{j,h \geq 0 \\ 0 \leq j+h \leq N}} \frac{A^j}{j!} \frac{B^h}{h!}.$$

L'ultima somma della precedente equazione è estesa a tutti i punti a coordinate intere del triangolo $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq N\}$. Se invece si considera la somma $\sum_{j,h=0}^{N} \frac{A^j}{j!} \frac{B^h}{h!}$, essa corrisponde ai punti a coordinate intere del quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le N, 0 \le y \le N\}$, ed essendo $T_2 := Q \setminus T_1 = \{(x, y) : x \le N, y \le N, x + y > N\}$, si ottiene

$$\left\| \sum_{\substack{j,h\ge 0\\ 0\le j+h\le N}} \frac{A^j}{j!}\frac{B^h}{h!} - \sum_{j,h=0}^{N} \frac{A^j}{j!}\frac{B^h}{h!} \right\| = \left\| \sum_{\substack{j,h\le N\\ j+h\ge N+1}} \frac{A^j}{j!}\frac{B^h}{h!} \right\| \le \sum_{\substack{j,h\le N\\ j+h\ge N+1}} \frac{\|A\|^j}{j!}\frac{\|B\|^h}{h!}$$
$$\le \sum_{\substack{j,h\ge 0\\ N+1\le j+h\le 2N}} \frac{\|A\|^j}{j!}\frac{\|B\|^h}{h!} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k,$$

dove nella prima disuguaglianza si sono utilizzate le (3.4), (3.5), nella seconda il fatto che T_2 è contenuto nella striscia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, N < x + y \le 2N\}$, e nell'ultimo passaggio ancora la formula del binomio di Newton. Essendo allora

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(\|A\| + \|B\|)^k$$
$$= e^{\|A\|+\|B\|} - e^{\|A\|+\|B\|} = 0,$$

si ottiene in definitiva

$$e^{A+B} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\substack{j,h\ge 0\\ 0\le j+h\le N}} \frac{A^j}{j!}\frac{B^h}{h!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j,h=0}^{N} \frac{A^j}{j!}\frac{B^h}{h!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{A^j}{j!} \sum_{h=0}^{N} \frac{B^h}{h!} = e^A e^B,$$

e cioè la tesi. $\square$

Osserviamo che, in base al teorema precedente, nel caso particolare $n = 1$ in cui la matrice A è ridotta a un numero complesso $z = x + iy$, poiché ovviamente x e iy commutano si ottiene

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k y^k}{k!} = e^x \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{+\infty} (\frac{(-1)^j y^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) = e^x(\sin y + i\cos y),$$

dove si sono usati gli sviluppi in serie di Taylor di $\sin y$ e $\cos y$. Dunque la definizione di esponenziale di matrici è coerente, come deve, con le formule di Eulero per l'esponenziale complesso.

Come preannunciato l'esponenziale di matrici fornisce l'integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti.

Teorema 3.3. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'integrale generale del sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti (3.2) è*

$$y(t, c) = e^{tA}c, \qquad t \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \frac{1}{h}\left(e^{hA}e^{tA} - e^{tA}\right) = \frac{1}{h}(e^{hA} - \mathbb{1})e^{tA},$$

dove nel primo passaggio si è usato il teorema 3.2 e il fatto che $hA \cdot tA = htA = tA \cdot hA$. Inoltre

$$\left\| \frac{1}{h}(e^{hA} - \mathbb{1}) - A \right\| = \left\| \frac{e^{hA} - \mathbb{1} - hA}{h} \right\| = \left\| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| = \left\| hA^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-2}A^{k-2}}{k!} \right\|$$
$$\le |h|\|A\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|h|^{k-2}\|A\|^{k-2}}{k!} = |h|\|A\|^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|h|^j\|A\|^j}{(j+2)!} \le |h|\|A\|^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|h|^j\|A\|^j}{j!}$$
$$= |h|\|A\|^2 e^{|h|\|A\|},$$

dove nel quarto passaggio si sono usate le (3.4), (3.5), nel quinto passaggio si è posto $j = k - 2$, e nel sesto la disuguaglianza $(j + 2)! \ge j!$. Poiché allora $\lim_{h\to 0} |h|\|A\|^2 e^{|h|\|A\|} = 0$, ne segue

$$\frac{d}{dt}e^{tA}c = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A}c - e^{tA}c\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^{hA} - \mathbb{1})e^{tA}c = Ae^{tA}c,$$

cioè che $t \mapsto y(t, c) = e^{tA}c$ è soluzione di (3.2) per ogni $c \in \mathbb{R}^n$. Inoltre chiaramente $e^{tA}e^{-tA} = e^0 = \mathbb{1}$ e dunque e^{tA} è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$ con inversa e^{-tA}, e pertanto per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ la soluzione $t \mapsto y(t, e^{-t_0A}y_0)$ soddisfa $y(t_0, e^{-t_0A}y_0) = y_0$, il che dimostra che $(t, c) \mapsto e^{tA}c$ è l'integrale generale di (3.2). $\square$

Corollario 3.4. *Una soluzione particolare di* (3.1) *è data da*

$$y_p(t) = \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} b(s), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. In base a quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente, $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(t) = e^{tA}$ è una soluzione dell'equazione matriciale $R'(t) = AR(t)$ ed è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$, e ne è pertanto una risolvente. La tesi segue allora immediatamente dal metodo di variazione delle costanti, teorema 2.8. $\square$

I risultati precedenti permettono dunque di esprimere l'integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti (3.1) tramite l'esponenziale della matrice A dei coefficienti del sistema. Ma ovviamente rimane il problema di calcolare, in ogni caso concreto, tale esponenziale, cosa che, a meno di casi particolarmente semplici, non è pratico tentare di fare usando la definizione (3.3).

A tale scopo, una prima osservazione a volte utile è la seguente. Date n soluzioni di (3.2) linearmente indipendenti $t \mapsto z_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, la matrice

$$R(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_n(t)], \qquad t \in \mathbb{R},$$

che ha i vettori $z_j(t)$ come colonne, è una risolvente di $R'(t) = AR(t)$. Si ha infatti

$$R'(t) = [z_1'(t) \quad \dots \quad z_n'(t)] = [Az_1(t) \quad \dots \quad Az_n(t)] = AR(t),$$

e $R(t)$ è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$ per l'indipendenza lineare di $z_1(t), \dots, z_n(t)$. Essendo inoltre $z_k(0) = \sum_{j=1}^n z_{kj}(0) e_j$, per unicità si avrà $z_k(t) = \sum_{j=1}^n z_{kj}(0) e^{tA} e_j$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, che equivale a $R(t) = e^{tA} R(0)$, ovvero, moltiplicando a destra per $R(0)^{-1}$,

$$e^{tA} = R(t) R(0)^{-1}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Studieremo ora alcuni metodi di calcolo di e^{tA} di generalità crescente. Cominciamo con il caso di una matrice diagonalizzabile.

Proposizione 3.5. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile, con autovalori complessi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (ripetuti secondo molteplicità), e rispettivi autovettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Definita allora la matrice invertibile*

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

che ha gli autovettori come colonne, si ha

$$e^{tA} = C \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} C^{-1}.$$

Dimostrazione. È noto che, nelle ipotesi fatte,

$$A = CDC^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e pertanto $A^2 = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1}$, e iterando, $A^k = CD^kC^{-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = C \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \right) C^{-1}$$

ed essendo ovviamente

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

si ottiene la tesi. $\square$

Dunque nelle ipotesi della proposizione precedente, l'integrale generale di (3.2) si scrive

$$y(t, c) = e^{tA} c = C e^{tD} C^{-1} c, \qquad t \in \mathbb{R},\, c \in \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

e conviene tenere presente il fatto che, anche se in generale gli autovalori e gli autovettori di A possono essere complessi, l'esponenziale e^{tA} è in ogni caso una matrice reale. Osserviamo anche che nel caso in cui gli autovalori e gli autovettori di A siano reali si può evitare il calcolo di C^{-1} sostituendo il vettore arbitrario $c \in \mathbb{R}^n$ con $k = C^{-1}c \in \mathbb{R}^n$, anch'esso arbitrario, e dunque rappresentare l'integrale generale come

$$y(t,k) = Ce^{tD}k, \qquad t \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Tuttavia usando questa forma dell'integrale generale, se si vuole imporre una condizione iniziale come $y(0,k) = Ck = y_0$ bisognerà porre $k = C^{-1}y_0$ e sarà dunque necessario calcolare comunque C^{-1}.

Un modo alternativo (rispetto a quello fornito dalla proposizione precedente) di rappresentare la soluzione, che consente di evitare il calcolo esplicito di e^{tA}, spesso un po' laborioso. si può ottenere osservando che $A^2v_j = A(Av_j) = \lambda_j Av_j = \lambda_j^2 v_j$, e iterando $A^k v_j = \lambda_j^k v_j$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,n$, da cui

$$e^{tA}v_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k v_j}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \lambda_j^k}{k!} v_j = e^{t\lambda_j} v_j.$$

Essendo allora $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di $\mathbb{C}^n$, ogni vettore $y_0 \in \mathbb{R}^n$ si scriverà $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ per opportuni $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,n$, e la soluzione $t \mapsto y(t)$ di (2.2) con dato iniziale $y(0) = y_0$ sarà dunque

$$y(t) = e^{tA}y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{tA} v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{t\lambda_j} v_j, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Notiamo anche che nel caso in cui ci sia un autovalore λ_j non reale, a priori il membro di destra di (3.8) contiene numeri complessi, pur dovendo essere $y(t)$ un vettore reale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Tuttavia, essendo la matrice A, e quindi il suo polinomio caratteristico, reali, essa ammetterà anche l'autovalore coniugato $\bar\lambda_j$, sia esso λ_{j+1}, ed anche i corrispondenti autovettori saranno l'uno il coniugato dell'altro, in quanto

$$(A - \lambda_j \mathbb{1})v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \bar\lambda_j \mathbb{1})\bar v_j = \overline{(A - \lambda_j \mathbb{1})v_j} = 0.$$

Ne segue, come illustrato dall'esempio seguente, che anche i rispettivi coefficienti α_j, α_{j+1} in (3.8) sono l'uno il coniugato dell'altro. Pertanto i corrispondenti termini della somma in (3.8) saranno

$$\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j + \alpha_{j+1} e^{t\lambda_{j+1}} v_{j+1} = \alpha_j e^{t\lambda_j} v_j + \overline{\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j} = 2\mathrm{Re}\,[\alpha_j e^{t\lambda_j} v_j].$$

Tale fatto, insieme alle formule di Eulero

$$e^{t\lambda_j} = e^{t\mathrm{Re}\,\lambda_j}[\cos(t\mathrm{Im}\,\lambda_j) + i\sin(t\mathrm{Im}\,\lambda_j)]$$

permette allora di esprimere la (3.8) in termini di sole quantità reali. Si vede dunque che l'esistenza di autovalori di A non reali comporta l'apparizione nella soluzione di funzioni oscillanti (cioè trigonometriche) di t.

Esempi 3.6. (a) Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

che ha come radici (distinte) $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$, e dunque la matrice A è diagonalizzabile. L'autovettore $v_1 = (x,y) \in \mathbb{C}^2$ corrispondente all'autovalore λ_1 è soluzione del sistema

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-i)x - 5y \\ x - (2+i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e dunque $v_1 = (2+i, 1)$, da cui come osservato sopra $v_2 = \bar v_1 = (2-i, 1)$. Si avrà pertanto $A = C \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} C^{-1}$ con C la matrice che ha come colonne i vettori v_1 e v_2 (in quest'ordine). Dunque

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -i/2 & i+1/2 \\ i/2 & -i+1/2 \end{bmatrix}$, e

$$\begin{aligned} e^{tA} &= C \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \left(-i+\frac{1}{2}\right) e^{(1+i)t} + \left(i+\frac{1}{2}\right) e^{(1-i)t} & (2+i)\left(\frac{1}{2}+i\right) e^{(1+i)t} + (2-i)\left(\frac{1}{2}-i\right) e^{(1-i)t} \\ -\frac{i}{2} e^{(1+i)t} + \frac{i}{2} e^{(1-i)t} & \left(\frac{1}{2}+i\right) e^{(1+i)t} + \left(\frac{1}{2}-i\right) e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \\ &= 2\mathrm{Re} \begin{bmatrix} \left(-i+\frac{1}{2}\right) e^{(1+i)t} & (2+i)\left(\frac{1}{2}+i\right) e^{(1+i)t} \\ -\frac{i}{2} e^{(1+i)t} & \left(\frac{1}{2}+i\right) e^{(1+i)t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t(2\sin t + \cos t) & -5e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t(\cos t - 2\sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue, in base alla (3.6), che le soluzioni del sistema considerato sono tutte date dalla formula

$$y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\left[(2c_1 - 5c_2)\sin t + c_1 \cos t\right] \\ e^t\left[(c_1 - 2c_2)\sin t + c_2 \cos t\right] \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, come detto, si può usare la (3.8), che fornisce

$$y(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} v_1 + \alpha_2 e^{(1-i)t} v_2.$$

Dovendo inoltre essere $y(t) \in \mathbb{R}^2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ed essendo $v_2 = \bar{v}_1$, si avrà, per $t = 0$,

$$\bar{\alpha}_1 v_2 + \bar{\alpha}_2 v_1 = \overline{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2} = \overline{y(0)} = y(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$

da cui $(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2)v_2 = (\alpha_1 - \bar{\alpha}_2)v_1$, che, per l'indipendenza lineare di v_1, v_2, implica $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, e dunque, se $\alpha_1 = \beta + i\gamma$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = 2\mathrm{Re}\left[\alpha_1 e^{(1+i)t} v_1\right] = 2\mathrm{Re}\left[(\beta + i\gamma)e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 2e^t\left[(2\beta - \gamma)\cos t - (\beta + 2\gamma)\sin t\right] \\ 2e^t(\beta \cos t - \gamma \sin t) \end{bmatrix}.$$

Si vede allora che si ritrova la soluzione calcolata precedentemente ponendo

$$\begin{cases} c_1 = 4\beta - 2\gamma, \\ c_2 = 2\beta. \end{cases}$$

(b) Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = y_2, y_3' = -2y_3. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

è triangolare superiore, e ha dunque i tre autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Dunque A è diagonalizzabile. I suoi autovettori si ottengono risolvendo:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = (1,0,0), \\ (A - \lambda_2 \mathbb{1})v_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y \\ 0 \\ -3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = (1,2,0), \\ (A - \lambda_3 \mathbb{1})v_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 3y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_3 = (0,0,1). \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale del sistema considerato è dato, in base alla (3.8), da

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} v_1 + \alpha_2 e^t v_2 + \alpha_3 e^{-2t} v_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^t \\ 2\alpha_2 e^t \\ \alpha_3 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Volendo inoltre calcolare e^{tA}, definita la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si avrà

$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Un altro caso in cui è facile calcolare e^{tA}, pur non essendo A necessariamente diagonalizzabile, è quello in cui $A = \mu\mathbb{1} + N$ con $N \in M_n(\mathbb{R})$ matrice *nilpotente*, cioè tale che esista $p \in \mathbb{N}$ tale che $N^p = 0$. Poiché allora chiaramente $\mu\mathbb{1}$ e N commutano, dal teorema 3.2 si avrà

$$e^{tA} = e^{t\mu\mathbb{1} + tN} = e^{t\mu\mathbb{1}} e^{tN} = e^{t\mu} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!}, \tag{3.9}$$

cioè poiché $N^p = 0$ (e dunque $N^k = 0$ per ogni $k \geq p$), la serie che definisce e^{tN} è in realtà una somma finita, che si può dunque calcolare esplicitamente.

Esempi di matrici nilpotenti sono forniti dalle matrici strettamente triangolari superiori (o inferiori), cioè matrici con tutti zeri sotto (o sopra) la diagonale principale, diagonale compresa. Si vede infatti facilmente per induzione che in tal caso per ogni $k = 1, \dots, n$, N^k è una matrice che ha tutti zeri sotto (o sopra) la diagonale, sulla diagonale, e anche su $k-1$ diagonali sopra (o sotto) quella principale, e dunque $N^n = 0$.

L'espressione (3.9) è particolarmente utile nel caso di una matrice A 2×2 non diagonalizzabile. Infatti in tal caso A ha un solo autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1, e si può dimostrare, come vedremo a breve, che la matrice $N = A - \lambda\mathbb{1}$ è sempre nilpotente, con $N^2 = 0$, e pertanto la (3.9) diviene $e^{tA} = e^{\lambda t}(\mathbb{1} + tN)$, molto semplice da calcolare, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 3.7. Determiniamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + t, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

che ha l'unica radice $\lambda = 2$ che è pertanto un autovalore di A di molteplicità algebrica 2, ma necessariamente di molteplicità geometrica 1 (altrimenti si avrebbe $A = 2\mathbb{1}$), e pertanto A non è diagonalizzabile. Definendo allora la matrice

$$N := A - 2\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si vede facilmente che $N^2 = 0$, e dunque dalla (3.9),

$$e^{tA} = e^{2t}(\mathbb{1} + tN) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema omogeneo associato a quello considerato è dato da

$$y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1-t) - c_2 t \\ c_1 t + (1+t)c_2 \end{bmatrix}.$$

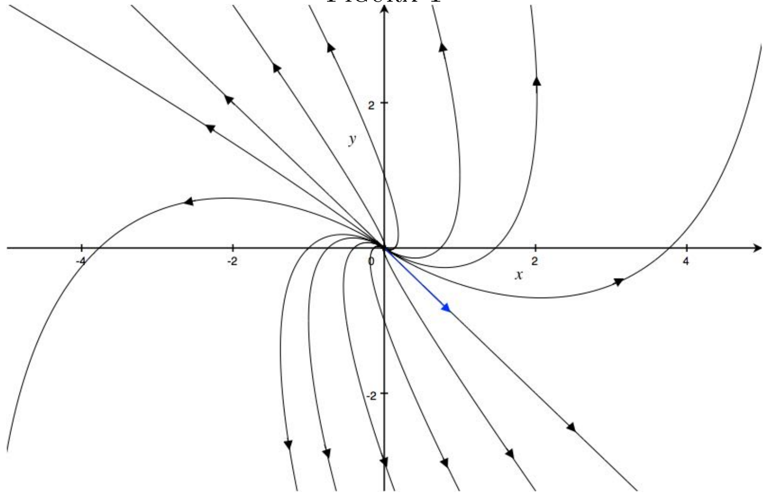
Una soluzione particolare del sistema non omogeneo si ottiene poi dal metodo di variazione delle costanti, corollario 3.4:

$$y_p(t) = \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \int_0^t ds\, e^{-2s} \begin{bmatrix} (1-t+s)s \\ (t-s)s \end{bmatrix}.$$

Usando allora per calcolare gli integrali le formule ricorsive

$$\int_0^t ds\, e^{-\alpha s} s^n = -\frac{e^{-\alpha t}}{t} + \frac{n}{\alpha} \int_0^t ds\, e^{-\alpha s} s^{n-1},$$

FIGURA 1



ottenute integrando per parti, si ricava

$$y_p(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (2-t)e^{2t} + 3t - 8 \\ (t-1)e^{2t} - 3t + 5 \end{bmatrix}.$$

Il diagramma di fase del sistema omogeneo e l'unico (a meno di costanti) autovettore di A, $v = (1, -1, 0)$, in blu, sono mostrati in fig. 1.

Un caso particolarmente semplice di matrice del tipo sopra considerato è quello di un *blocco elementare di Jordan* di ordine $p \in \mathbb{N}$:

$$J_p(\mu) := \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \mu & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{C}$$

(tutti μ sulla diagonale principale, tutti 1 su quella sopra, e tutti 0 altrove). Si vede infatti facilmente per induzione che la matrice $N = J_p(\mu) - \mu\mathbb{1}$ (che ha tutti 1 sulla diagonale sopra a quella principale, e tutti 0 altrove) è tale che N^k ha tutti 1 sulla k-esima diagonale sopra a quella principale, e tutti zero altrove, e pertanto, dalla (3.9):

$$e^{tJ_p(\mu)} = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \dots & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & & & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \frac{t^{p-3}}{(p-3)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

(tutti 1 sulla diagonale principale, tutti t sulla quella sopra, tutti $\frac{t^2}{2!}$ su quella ancora sopra, e così via).

Inoltre, se la matrice A è diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix}, \qquad A_j \in M_{n_j}(\mathbb{R}),\ j = 1, \dots, r,$$

si verifica facilmente che anche A^k è diagonale a blocchi, con blocchi diagonali A_j^k, $j = 1, \dots, r$, $k \in \mathbb{N}$, e pertanto

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tA_1} & & & 0 \\ & e^{tA_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tA_r} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Alla luce di queste ultime osservazioni (e non solo), riveste importanza fondamentale il risultato seguente.

Teorema 3.8 (forma canonica di Jordan di una matrice)**.** *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, e siano $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ i suoi autovalori distinti, con molteplicità geometriche $m_1, \dots, m_r$ e algebriche $n_1, \dots, n_r$. Allora esiste una matrice invertibile $C \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $A = CJC^{-1}$, dove $J \in M_n(\mathbb{C})$ è diagonale a blocchi*

$$J = \begin{bmatrix} J(\mu_1) & & & 0 \\ & J(\mu_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\mu_r) \end{bmatrix},$$

e dove, per ogni $j = 1, \dots, r$,

$$J(\mu_j) = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\mu_j) & & & 0 \\ & J_{p_2}(\mu_j) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{p_{m_j}}(\mu_j) \end{bmatrix}$$

con $p_1 + \cdots + p_{m_j} = n_j$, cioè $J(\mu_j)$ è diagonale a blocchi, e ha sulla diagonale principale un numero di blocchi elementari di Jordan pari alla molteplicità geometrica m_j di μ_j, la cui somma delle dimensioni è pari alla molteplicità algebrica n_j di μ_j.

La matrice J è detta la *forma canonica di Jordan* di A.

Pertanto nelle notazioni del teorema precedente si avrà

$$e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1},$$

e l'esponenziale e^{tJ} si calcola immediatamente usando le (3.10), (3.11). Dunque il probelma del calcolo di e^{tA} è ridotto a quello del calcolo della sua forma canonica di Jordan, e della matrice C, le cui colonne sono i cosiddetti *autovettori generalizzati* di A. Sebbene sia possibile dare un algoritmo per la determinazione di J e C, la sua descrizione nel caso generale è piuttosto complicata, e quindi ci limiteremo a fornirla nel caso di una matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$.

A tale scopo cominciamo con l'osservare che se A ha $r = 3$ autovalori distinti allora A è diagonalizzabile, e si ricade quindi nella situazione coperta dalla proposizione 3.5. Supponiamo allora che A abbia $r \leq 2$ autovalori distinti, che saranno dunque necessariamente reali (essendo A reale, se avesse un autovalore complesso avrebbe anche quello coniugato, con la stessa molteplicità algebrica, ma la somma di tali molteplicità deve essere 3). Sono allora possibili i casi seguenti.

(I) A ha due autovalori distinti $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, con molteplicità algebriche $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Allora necessariamente la molteplicità geometrica di μ_1 è $m_1 = 1$, mentre si può avere $m_2 = 1$ o $m_2 = 2$. Per decidere il valore di m_2 si cerca allora un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$(A - \mu_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0, \quad (A - \mu_2 \mathbb{1}) v_{2,2} \neq 0 \tag{3.12}$$

(cioè $v_{2,2} \in \ker(A - \mu_2 \mathbb{1})^2 \setminus \ker(A - \mu_2 \mathbb{1})$). Sono allora possibili i seguenti due sottocasi.

(i) Non esiste un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.12). Ne segue che allora $m_2 = 2$ e la matrice A è diagonalizzabile, per cui si ricade nella situazione coperta dalla proposizione 3.5.

(ii) Esiste un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.12). Ne segue che allora $m_2 = 1$ e A non è diagonalizzabile. In base a tali dati, è direttamente possibile dire che la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

In questo caso il vettore $v_{2,2}$ è detto un *autovettore generalizzato* di A. Posto poi

$$v_{2,1} := (A - \mu_2 \mathbb{1})v_{2,2} \tag{3.14}$$

per le (3.12) si ha $v_{2,1} \neq 0$ e $(A - \mu_2 \mathbb{1})v_{2,1} = (A - \mu_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0$, e dunque $v_{2,1}$ è l'unico (a meno di moltiplicazione per una costante) autovettore di A relativo all'autovalore μ_2. Indicato poi con $v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un autovettore di A relativo a μ_1 la matrice

$$C = [v_1 \quad v_{2,1} \quad v_{2,2}]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.13). È dunque a questo punto possibile calcolare esplicitamente e^{tA}. Tuttavia, come nel caso di matrici diagonalizzabili, anche in questo caso tale calcolo può essere piuttosto laborioso, e allo scopo di scrivere l'integrale generale di (3.2) può convenire usare una formula analoga alla (3.8). A tale scopo osserviamo che dalle (3.12) $(A - \mu_2 \mathbb{1})^k v_{2,2} = 0$ per ogni $k \geq 2$, e dunque dalla (3.14)

$$e^{tA} v_{2,2} = e^{\mu_2 t} e^{t(A - \mu_2 \mathbb{1})} v_{2,2} = e^{\mu_2 t}[\mathbb{1} + t(A - \mu_2 \mathbb{1})]v_{2,2} = e^{\mu_2 t}[v_{2,2} + t v_{2,1}],$$

e pertanto, tenendo conto che v_1 e $v_{2,1}$ sono autovettori di A, l'integrale generale del sistema lineare omogeno (3.2) è dato da

$$\begin{aligned} y(t,c) &= e^{tA}[c_1 v_1 + c_{2,1} v_{2,1} + c_{2,2} v_{2,2}] \\ &= c_1 e^{\mu_1 t} v_1 + (c_{2,1} + c_{2,2} t) e^{\mu_2 t} v_{2,1} + c_{2,2} e^{\mu_2 t} v_{2,2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

(II) A ha un solo autovalore $\mu_1 \in \mathbb{R}$ di molteplicità algebrica $n_1 = 3$. Per determinarne la molteplicità geometrica e dunque la forma canonica di Jordan si calcola $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2$ (si noti che in questo caso si ha necessariamente $(A - \mu_1 \mathbb{1})^3 = 0$). Sono allora possibili i seguenti due sottocasi.

(i) $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 = 0$. Allora l'autovalore μ_1 ha molteplicità geometrica $m_1 = 2$ o $m_1 = 3$. Per determinarla si cerca allora un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che

$$(A - \mu_1 \mathbb{1})v_3 \neq 0. \tag{3.16}$$

Anche ora sono possibili due sottocasi.

(a) Non esiste un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.16). Allora si ha $m_1 = 3$ e la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Esiste un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ soluzione di (3.16). Allora si ha $m_1 = 2$ e dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Anche in questo caso v_3 è un autovettore generalizzato di A. Posto poi

$$v_2 := (A - \mu_1 \mathbb{1})v_3 \tag{3.18}$$

per la (3.16) si ha $v_2 \neq 0$, ed essendo $(A - \mu_1 \mathbb{1})^2 = 0$ si ha $(A - \mu_1 \mathbb{1})v_2 = (A - \mu_1 \mathbb{1})^2 v_3 = 0$, e dunque v_2 è un autovettore di A relativo all'autovalore μ_1. Indicato poi con $v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un altro autovettore di A relativo a μ_1 linearmente indipendente da v_2, la matrice

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.17). Anche in questo caso allo scopo di scrivere l'integrale generale di (3.2) può convenire evitare il calcolo esplicito di e^{tA} e usare invece una formula analoga alla (3.15). Ragionando infatti in modo del tutto analogo a quanto fatto nel punto (I.ii) si trova che in questo caso l'integrale generale del sistema lineare omogeneo (3.2) è dato da

$$y(t,c) = c_1 e^{\mu_1 t} v_1 + (c_2 + c_3 t) e^{\mu_1 t} v_2 + c_3 e^{\mu_1 t} v_3. \tag{3.19}$$

(ii) $(A-\mu_1\mathbb{1})^2 \neq 0$. Allora l'autovalore μ_1 ha molteplicità geometrica $m_1 = 1$ e dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Inoltre esisterà un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che $(A-\mu_1\mathbb{1})^2 v_3 \neq 0$. Posto allora

$$v_2 := (A-\mu_1\mathbb{1})v_3, \quad v_1 := (A-\mu_1\mathbb{1})v_2 = (A-\mu_1\mathbb{1})^2 v_3, \tag{3.21}$$

si avrà $v_1, v_2 \neq 0$, e $(A-\mu_1\mathbb{1})v_1 = (A-\mu_1)^3 v_3 = 0$, cioè v_1 è l'unico (a meno di moltiplicazione per una costante) autovettore di A, mentre v_2 e v_3 sono autovettori generalizzati. Di nuovo la matrice

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

che ha tali vettori come colonne è quella che trasforma A nella sua forma canonica di Jordan (3.20). Per ottenere una formula analoga alle (3.15) e (3.19) in questo caso osserviamo che, grazie alle (3.21), $(A-\mu_1\mathbb{1})^k v_2 = 0$ per ogni $k \geq 2$, e dunque,

$$\begin{aligned} e^{tA}v_3 &= e^{\mu_1 t}e^{t(A-\mu_1\mathbb{1})}v_3 = e^{\mu_1 t}[\mathbb{1} + t(A-\mu_1\mathbb{1}) + \frac{t^2}{2!}(A-\mu_1\mathbb{1})^2]v_3 \\ &= e^{\mu_1 t}[v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2!}v_1], \\ e^{tA}v_2 &= e^{\mu_1 t}e^{t(A-\mu_1\mathbb{1})}v_2 = e^{\mu_1 t}[\mathbb{1} + t(A-\mu_1\mathbb{1})]v_2 = e^{\mu_1 t}[v_2 + tv_1]. \end{aligned}$$

Di conseguenza l'integrale generale di (3.2) è in questo caso

$$y(t,c) = \left(c_1 + c_2 t + c_3\frac{t^2}{2!}\right)e^{\mu_1 t}v_1 + (c_2 + c_3 t)e^{\mu_1 t}v_2 + c_3 e^{\mu_1 t}v_3. \tag{3.22}$$

Facciamo alcuni esempi dell'uso dell'algoritmo appena esposto.

Esempi 3.9. (a) Calcoliamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3, \end{cases}$$

nonché l'esponenziale della matrice A dei coefficienti.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti si determinano da

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda\mathbb{1}) &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2 - 2 - (3-\lambda) + 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

e quindi gli autovalori distinti sono $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 3$, con molteplicità algebriche $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ e siamo dunque nel caso (I) dell'algoritmo. Cerchiamo allora una soluzione delle (3.12). Avendosi

$$A - 3\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (A-3\mathbb{1})^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

si vede che $v = (x,y,z) \in \ker(A-3\mathbb{1})^2$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x-y) \\ 0 \\ 4(x-y) \end{bmatrix},$$

cioè $y = x$, e allora la condizione $v = (x,x,z) \notin \ker(A-3\mathbb{1})$ è equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ x-z \\ x-z \end{bmatrix},$$

da cui $x \neq z$, e quindi $v_{2,2} = (0,0,1)$ è un autovettore generalizzato di A relativo a $\mu_2 = 3$ che non è un autovettore (e dunque la molteplicità geometrica di μ_2 è $m_2 = 1$, siamo cioè nel caso (I.ii)), mentre $v_{2,1} := (A - 3\mathbb{1})v_{2,2} = (-1,-1,-1) \in \ker(A - 3\mathbb{1})$ è l'autovettore associato a μ_2. Inoltre l'unico autovettore v_1 associato a μ_1 si ottiene da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A - \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ x + 2y - z \\ -x + 2y + z \end{bmatrix}$$

e dunque $v_1 = (1, 0, 1)$. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è $A = CJC^{-1}$ dove

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale si può ottenere dalla (3.15):

$$y(t) = c_1 e^t v_1 + (c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t} v_{2,1} + c_{2,2}e^{3t} v_{2,2} = \begin{bmatrix} c_1 e^t - (c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t} \\ -(c_{2,1} + c_{2,2}t)e^{3t} \\ c_1 e^t - (c_{2,1} - c_{2,2}(1 - t))e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, l'integrale generale si può esprimere analogamente alla (3.7):

$$y(t) = Ce^{tJ}k = C \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^t - (k_2 + k_3 t)e^{3t} \\ -(k_2 + k_3 t)e^{3t} \\ k_1 e^t - (k_2 - k_3(1 - t))e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda il calcolo di e^{tA} si ha

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e l'esponenziale è dunque

$$e^{tA} = C \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} e^t + te^{3t} & -e^t + e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & e^{3t} & -te^{3t} \\ (t-1)e^{3t} + e^t & -e^t + e^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(b) Calcoliamo l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 + y_3, \end{cases}$$

nonché l'esponenziale della matrice A dei coefficienti.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti si determinano da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) + (2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) = (2 - \lambda)^3 = 0 \end{aligned}$$

e quindi c'è un unico autovalore $\mu_1 = 2$, con molteplicità algebrica $n_1 = 3$, e siamo dunque nel caso (II) dell'algoritmo. Calcoliamo allora

$$(A - 2\mathbb{1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui si vede che siamo nel caso (II.i). Cerchiamo allora un vettore $v_3 = (x, y, z)$ tale che

$$(A - 2\mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x - z \\ x - z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una soluzione è ovviamente $v_3 = (1, 0, 0)$, e siamo dunque nel caso (II.i.b), cioè $\mu_1 = 2$ ha molteplicità geometrica $m_1 = 2$. Definiamo allora

$$v_2 := (A - 2\mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che sarà un autovettore di A, e determiniamo un altro autovettore $v_1 = (x, y, z)$ da esso linearmente indipendente:

$$(A - 2\mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x - z \\ x - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui $v_1 = (1, 0, 1)$. L'integrale generale del sistema considerato si ottiene allora dalla (3.19):

$$y(t) = c_1 e^{2t} v_1 + (c_2 + c_3 t)e^{2t} v_2 + c_3 e^{2t} v_3 = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3(1 + t) \\ c_2 + c_3 t \\ c_1 + c_2 + c_3 t \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'esponenziale si ha $A = CJC^{-1}$ con

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 + t & 0 & -t \\ t & 1 & -t \\ t & 0 & 1 - t \end{bmatrix}.$$

Concludiamo osservando che anche per esprimere la soluzione particolare del sistema non omogeneo tramite il metodo di variazione delle costanti, corollario 3.4, si può evitare il calcolo esplicito dell'esponenziale decomponendo il termine noto $b(s)$ nella base degli autovettori generalizzati di A, analogamente a quanto fatto per ottenere le (3.15), (3.19), (3.22). Ad esempio nel caso (I.ii), se

$$b(s) = b_1(s)v_1 + b_{2,1}(s)v_{2,1} + b_{2,2}(s)v_{2,2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

è tale decomposizione, si otterrà la soluzione particolare

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^t ds\, e^{(t-s)A}[b_1(s)v_1 + b_{2,1}(s)v_{2,1} + b_{2,2}(s)v_{2,2}] \\ &= \int_0^t ds\, e^{\mu_1(t-s)} b_1(s)\, v_1 + \int_0^t ds\, e^{\mu_2(t-s)}[b_{2,1}(s) + (t - s)b_{2,2}(s)]\, v_{2,1} + \int_0^t ds\, e^{\mu_2(t-s)} b_{2,2}(s)\, v_{2,2}. \end{aligned}$$

4. Cenno al concetto di stabilità

Considereremo ora un sistema in forma normale (1.3) in cui il secondo membro è indipendente da t:

$$y' = f(y), \tag{4.1}$$

con $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, localmente lypschitziana. Un tale sistema è detto un *sistema autonomo*. Per tali sistemi, riveste grande importanza la nozione seguente.

Definizione 4.1. Un punto $a \in D$ è un *punto stazionario* per (4.1) se $f(a) = 0$.

In tal caso, è chiaro che la funzione costante $y(t) = a$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è soluzione del problema di Cauchy associato a (4.1) con dato iniziale $y(0) = a$.

Esempio 4.2. Consideriamo l'equazione autonoma

$$y' = 1 - y^2.$$

già in parte studiata nell'esempio 1.7. I suoi punti stazionari sono chiaramente $a_\pm := \pm 1$. Analizziamo il comportamento delle altre soluzioni dell'equazione. Come visto, la soluzione per separazione di variabili, insieme alla condizione iniziale $y(0) = y_0$, $y_0 \neq \pm 1$, fornisce

$$\left| \frac{1 - y(t)}{1 + y(t)} \right| = \left| \frac{1 - y_0}{1 + y_0} \right| e^{2t}$$

e il fatto, già visto anch'esso, che $y(t) \neq \pm 1$ per ogni t permette di eliminare i moduli, ottenendo

$$y(t) = \frac{1 + y_0 - (1 - y_0)e^{2t}}{1 + y_0 + (1 - y_0)e^{2t}},$$

e tale soluzione è definita nel più grande intervallo contenente $t = 0$ in cui non si annulla mai il denominatore. Cioè essendo, come si vede facilmente,

$$\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \begin{cases} < 0 & \text{se } y_0 \in (-1, 1), \\ \in (0, 1) & \text{se } y_0 < -1, \\ > 1 & \text{se } y_0 > 1, \end{cases}$$

la soluzione trovata è definita in tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 \in (-1, 1)$, in $(t_0, +\infty)$ se $y_0 < -1$, e in $(-\infty, t_0)$ se $y_0 > 1$, dove $t_0 = \frac{1}{2} \log(\frac{y_0+1}{y_0-1})$. Si vede inoltre immediatamente che

$$\begin{aligned} y_0 > -1, y_0 \neq 1 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t \to -\infty} y(t) = 1 = a_+, \\ y_0 < 1, y_0 \neq -1 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = -1 = a_-. \end{aligned}$$

L'importanza della nozione di punto stazionario è dovuta alle considerazioni seguenti. Se, come spesso accade, il sistema (4.1) descrive il funzionamento di un sistema meccanico e/o elettronico, si vuole tipicamente essere sicuri a priori che le soluzioni "interessanti" non raggiungano la frontiera dell'insieme D di definizione del secondo membro, che normalmente rappresenta una frontiera fisica, oltre la quale il sistema considerato cessa di funzionare (si "rompe"), o di essere descritto accuratamente dalla f scelta (ad esempio, nel caso dell'equazione che descrive il moto di un punto materiale attaccato a una molla, la frontiera di D potrebbe essere data dai punti tali che la molla, elongata oltre di essi, si spezza). Se allora (4.1) possiede un punto stazionario, si può essere sicuri che mettendo in funzione il sistema nella configurazione ad esso corrispondente questo continuerà a funzionare indefinitamente.

Tuttavia, a causa degli inevitabili errori di misura, che limitano la precisione con cui è nota la configurazione iniziale del sistema, è di norma solo possibile avviare il sistema in una configurazione "vicina" a quella stazionaria. Ma questo non è in generale sufficiente a garantire che l'evoluzione successiva del sistema non lo porti ad allontanarsi in modo "catastrofico" dal suo stato iniziale, come mostra il caso del punto stazionario $a_+ = 1$ dell'esempio precedente: anche prendendo un dato iniziale $y_0 > 1$ molto vicino a 1, la soluzione corrispondente diverge nel tempo finito $t_0 > 0$, (e non esiste nella pratica alcun sistema i cui parametri possano assumere valori arbitrariamente grandi). Al contrario, nel caso del punto stazionario $a_- = -1$ dello stesso esempio, tutte le soluzioni che partono sufficientemente vicino ad esso (cioè da un dato iniziale $y_0 < 1$) rimangono vicine, ed anzi convergono al punto stazionario stesso asintoticamente nel futuro. Una tale proprietà di un punto stazionario è pertanto particolarmente auspicabile, in quanto consente di avere un ragionevole controllo sull'evoluzione del sistema anche in presenza di errori di misura.

Da questo punto di vista, la seguente definizione riveste importanza centrale.

Definizione 4.3. Un punto stazionario $a \in D$ di (4.1) è detto *stabile*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y_0 \in B_\delta(a)$ la soluzione massimale $t \mapsto y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

è definita per ogni $t \geq 0$ e soddisfa $y(t) \in B_\varepsilon(a)$ per ogni $t \geq 0$. Un punto stazionario $a \in D$ è detto *asintoticamente stabile*, se è stabile e se inoltre esiste $r > 0$ tale che per ogni $y_0 \in B_r(a)$ la soluzione massimale $t \mapsto y(t)$ del problema di Cauchy (4.2) è definita per ogni $t \geq 0$ e soddisfa $\lim_{t \to +\infty} y(t) = a$. Infine un punto stazionario che non è stabile è detto *instabile*.

In sostanza, un punto stazionario è stabile se ogni soluzione che parte sufficientemente vicino ad esso rimane entro una distanza prefissata, è asintoticamente stabile se inoltre ogni soluzione che parte sufficientemente vicino si avvicina indefinitamente, ed è instabile se arbitrariamente vicino ad esso parte almeno una soluzione che si allontana ad una distanza prefissata. Dunque, il punto stazionario $a_+ = 1$ dell'esempio precedente è instabile, mentre il punto $a_- = -1$ è asintoticamente stabile.

Un sistema lineare (2.1) è autonomo chiaramente se è a coefficienti costanti (cioè $A(t)$ è indipendente da t), e se $b(t) = b$ è pure indipendente da t. Consideriamo per semplicità solo il caso del sistema omogeneo (3.2), cioè il caso $b = 0$ (a questo si riduce, tramite il cambiamento di variabile $z = y + A^{-1}b$, il caso con $b \neq 0$ e A invertibile, poiché $Ay + b = A(y + A^{-1}b)$). Per un tale sistema l'origine $a = 0$ è chiaramente un punto stazionario. La sua stabilità o meno dipende dagli autovalori della matrice A dei coefficienti.

Teorema 4.4 (stabilità dell'origine di un sistema lineare autonomo)**.** *Siano* $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ *gli autovalori distinti di* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, con molteplicità algebriche* $n_1, \dots, n_r$ *e geometriche* $m_1, \dots, m_r$*. Allora*

(i) se $\operatorname{Re} \mu_j < 0$ *per ogni* $j = 1, \dots, r$*, l'origine è asintoticamente stabile per il sistema* (3.2)*;*

(ii) se $\operatorname{Re} \mu_j \leq 0$ *e* $n_j = m_j$ *per ogni* $j = 1, \dots, r$*, l'origine è stabile per il sistema* (3.2)*;*

(iii) se esiste $j \in \{1, \dots, r\}$ *tale che* $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ *o tale che* $\operatorname{Re} \mu_j \geq 0$ *e* $m_j < n_j$*, l'origine è instabile per il sistema* (3.2)*.*

Dimostrazione. Sia $A = CJC^{-1}$ la forma canonica di Jordan della matrice A. Posto

$$\|C\|_2 := \left[\sum_{j,k=1}^{n} |C_{jk}|^2 \right]^{1/2},$$

grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|C^{-1}y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(C^{-1}y)_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (C^{-1})_{jk} y_k \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |(C^{-1})_{jk}|^2 \sum_{h=1}^{n} |y_h|^2 = \|C^{-1}\|_2^2 \|y\|$$

e analogamente, per ogni $z \in \mathbb{C}^n$, $\|Cz\| \leq \|C\|_2 \|z\|$.

(i) Sia $y(t) = e^{tA} y_0$ la soluzione di (3.2) tale che $y(0) = y_0$. Posto $z(t) := C^{-1}y(t)$, $z_0 := C^{-1}y_0$, si ha, grazie al teorema 3.8 e alla (3.10), $z(t) = e^{tJ} z_0 = (e^{\lambda_1 t} z_1(t), \dots, e^{\lambda_n t} z_n(t))$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A ripetuti secondo la loro molteplicità algebrica, e $z_1(t), \dots, z_n(t)$ sono polinomi in t. Pertanto essendo $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$\lim_{t \to +\infty} \|z(t)\|^2 = \lim_{t \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} |e^{\lambda_j t} z_j(t)|^2 = \lim_{t \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} e^{2 \operatorname{Re} \lambda_j t} |z_j(t)|^2 = 0,$$

e dunque

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = \lim_{t \to +\infty} \|Cz(t)\| \leq \lim_{t \to +\infty} \|C\|_2 \|z(t)\| = 0.$$

(ii) Con le notazioni del punto precedente, essendo $m_j = n_j$ per ogni $j = 1, \dots, r$, la matrice A è diagonalizzabile, e dunque $z(t) = (e^{\lambda_1 t} z_{0,1}, \dots, e^{\lambda_n t} z_{0,n})$. Pertanto essendo $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$\|z(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} e^{2 \operatorname{Re} \lambda_j t} |z_{0,j}|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |z_{0,j}|^2 = \|z_0\|^2,$$

da cui

$$\|y(t)\| = \|Cz(t)\| \leq \|C\|_2 \|z(t)| \leq \|C\|_2 \|z_0\| = \|C\|_2 \|C^{-1} y_0\| \leq \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2 \|y_0\|,$$

e la definizione di stabilità è verificata prendendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\|C\|_2 \|C^{-1}\|_2}$.

(iii) Supponiamo per semplicità che l'autovalore μ_j, e dunque il relativo autovettore v_j siano reali, e dunque che $\mu_j > 0$. Allora la soluzione con dato iniziale $y_0 = v_j$ è $y(t) = e^{\mu_j t} v_j$ e pertanto $\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = \lim_{t \to +\infty} e^{\mu_j t} \|v_j\| = +\infty$ e l'origine è instabile. Se poi $\mu_j \geq 0$ e $m_j < n_j$, per il teorema 3.8 la matrice A ammette un autovettore $v_{j,1}$ e un autovettore generalizzato $v_{j,2}$ (entrambi reali), tali che $(A - \mu_j \mathbb{1}) v_{j,2} = v_{j,1}$. Di conseguenza, come visto, c'è la soluzione $y(t) := e^{tA} v_{j,2} = e^{\mu_j t} (v_{j,2} + t v_{j,1})$ e pertanto

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = \lim_{t \to +\infty} e^{\mu_j t} \|v_{j,2} + t v_{j,1}\| \geq \lim_{t \to +\infty} |t| \|v_{j,1}\| - \|v_{j,2}\| = +\infty,$$

e l'origine è instabile anche in questo caso. □

Lo studio della stabilità dei punti stazionari di un sistema non lineare è ovviamente più complicato. Tuttavia è possibile fornire un criterio, spesso utile, in termini degli autovalori dello jacobiano della f nel punto stazionario.

Teorema 4.5. *Sia* $a \in D$ *un punto stazionario di* (4.1)*, sia* $A := J_f(a)$*, e siano* $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ *i suoi autovalori distinti. Allora:*

(i) se $\operatorname{Re} \mu_j < 0$ *per ogni* $j = 1, \dots, r$*,* $a \in D$ *è asintoticamente stabile per il sistema* (4.1)*;*

(ii) se esiste $j \in \{1, \dots, r\}$ *tale che* $\operatorname{Re} \mu_j > 0$*,* $a \in D$ *è instabile per il sistema* (4.1)*.*

L'idea della dimostrazione (piuttosto complicata) è che essendo $f(y) = J_f(a)(y-a) + o(\|y-a\|)$, il comportamento delle soluzioni di (4.1) sia ben approssimato, in un intorno di $y = a$ sufficientemente piccolo, da quello delle soluzioni del corrispondente *sistema linearizzato* $y' = J_f(a)(y-a)$. Più precisamente, si costruisce un cambiamento di variabile (non lineare) $z = y - a + o(\|y-a\|)$ che elimina i termini non lineari dello sviluppo di f in un intorno di $y = a$, e si applica poi il teorema 4.4 al sistema lineare così ottenuto.

I prossimi esempi illustrano l'utilizzo del teorema precedente per lo studio della stabilità dei punti stazionari, nonché un semplice metodo a volte utile quando il teorema non dà informazioni, cioè se ci sono tutti autovalori con parte reale non positiva, e almeno uno con parte reale nulla.

Esempi 4.6. (a) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = x(y+1), \\ y' = x(y+1)\cos^2 y. \end{cases}$$

I suoi punti stazionari sono tutti i punti $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, e i punti $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Inoltre posto $f(x, y) = (x(y+1), x(y+1)\cos^2 y)$, si ha

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} y+1 & x \\ (y+1)\cos^2 y & x(\cos^2 y - 2(y+1)\cos y \sin y) \end{bmatrix},$$

e pertanto

$$J_f(0,y) = \begin{bmatrix} y+1 & 0 \\ (y+1)\cos^2 y & 0 \end{bmatrix}$$

essendo triangolare inferiore ha autovalori $\lambda_1 = y+1$, $\lambda_2 = 0$. Se allora $y > -1$ c'è un autovalore positivo, e dunque per il teorema 4.5 i punti stazionari $(0, y)$, $y > -1$, sono instabili. Analogamente essendo

$$J_f(x,-1) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & x\cos^2 1 \end{bmatrix}$$

i punti stazionari $(x, -1)$, $x > 0$, sono instabili. D'altra parte, poiché in entrambi i casi c'è sempre un autovalore nullo, il teorema 4.5 non consente di concludere nulla circa la stabilità o meno dei rimanenti punti stazionari (per poterlo applicare sarebbe necessario che entrambi gli autovalori fossero negativi). Allo scopo di studiarne la stabilità è possibile in questo caso procedere al modo seguente. Osserviamo per cominciare che data una soluzione non stazionaria $I \ni t \mapsto (x(t), y(t))$ si avrà $x'(t) = x(t)(y(t)+1) \neq 0$ per ogni $t \in I$, e pertanto la funzione $t \mapsto x(t)$ è strettamente monotona, e dunque invertibile. Sia $x \mapsto t(x)$ la sua inversa, e si consideri la funzione composta $x \mapsto y(t(x))$, il cui grafico è il sostegno della curva parametrica $t \mapsto (x(t), y(t))$ definita dalla soluzione considerata. Per non complicare le notazioni, denoteremo tale funzione come $x \mapsto y(x)$. La sua derivata sarà allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'} = \cos^2 y,$$

avendo applicato la regola di derivazione dell'inversa per calcolare $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}$. Otteniamo dunque un'equazione differenziale per $x \mapsto y(x)$, che possiamo risolvere per separazione di variabili:

$$x + c = \int dx = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \tan y, \qquad y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

a cui vanno aggiunte le soluzioni costanti $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre tali sostegni sono percorsi dalle soluzioni $t \mapsto (x(t), y(t))$ nel verso delle x crescenti dove $x' = x(y+1) > 0$, cioè nei quadranti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > -1\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < -1\}$ e nel verso delle x decrescenti nei quadranti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > -1\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < -1\}$. Si ottiene pertanto il *diagramma di fase* del sistema considerato, mostrato in fig. 2, dal quale si deduce che i punti stazionari $(x, -1)$, $x < 0$, e $(0, y)$, $y < -1$, sono stabili, mentre il punto $(0, -1)$ è instabile. (I punti stazionari stabili e instabili sono indicati in fig. 2 dalla linea rossa continua e tratteggiata rispettivamente.)

(b) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \frac{y^2 - x^2 y}{x}. \end{cases}$$

Chiaramente i suoi punti stazionari sono i punti $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Lo jacobiano di $f(x,y) = (y, \frac{y^2 - x^2 y}{x})$ è

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{y^2}{x^2} - y & \frac{2y - x^2}{x} \end{bmatrix},$$

Figura 2. Esempio 4.6(a)

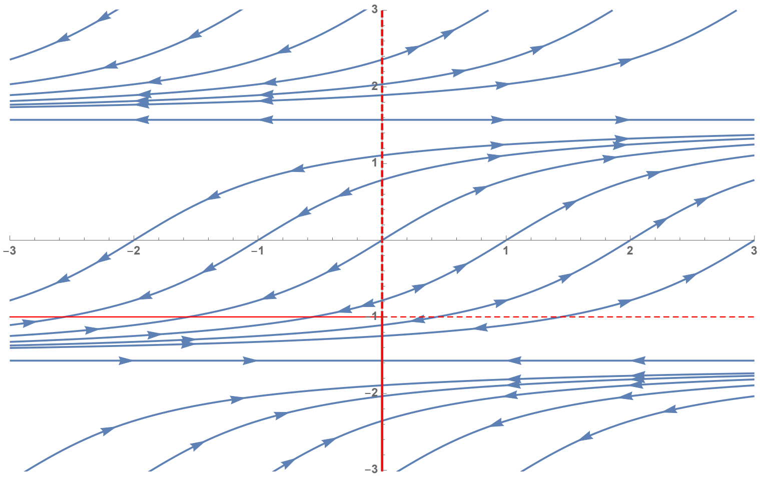
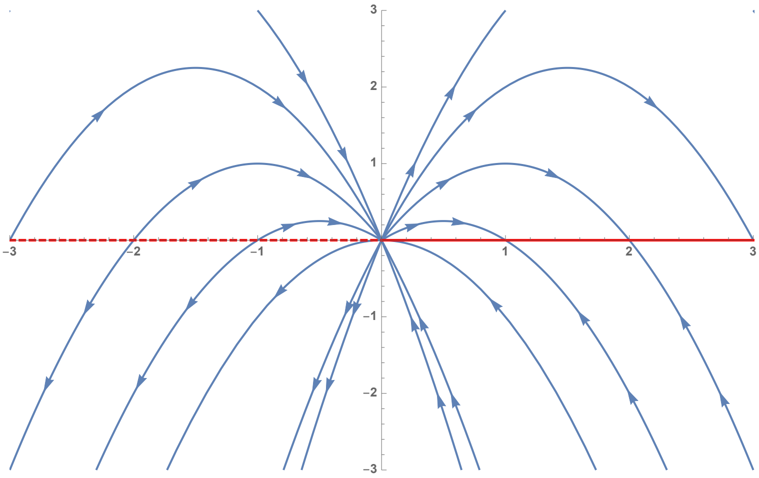


Figura 3. Esempio 4.6(b)



e dunque

$$J_f(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -x \end{bmatrix},$$

ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -x$. Pertanto i punti stazionari $(0, x)$, $x < 0$ sono instabili, mentre non abbiamo informazioni sugli altri. Procedendo allora come nell'esempio precedente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{1}{x}y - x,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti variabili. Com'è noto, l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int dx\, \frac{1}{x}} \left[c + \int dx\, e^{-\int dx\, \frac{1}{x}} (-x) \right] = e^{\log|x|} \left[c - \int dx\, e^{-\log|x|} x \right] \\ &= |x| \left[c - \int dx\, \frac{x}{|x|} \right] = c|x| - x^2 = cx - x^2, \qquad x \neq 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove nel penultimo passaggio si è usato il fatto che la primitiva di $\frac{x}{|x|}$ è $|x|$ e nell'ultimo il fatto che il segno della costante arbitraria c non è fissato. Tenendo inoltre conto del fatto che, essendo $x' = y$, queste curve sono percorse dalle soluzioni nel verso delle x crescenti per $y > 0$ e in quello delle x decrescenti per $y < 0$, si trova il diagramma di fase mostrato in fig. 3, dal quale si deduce che i punti stazionari $(x, 0)$, $x > 0$ sono stabili, mentre l'origine $(0, 0)$ è instabile. È anche interessante osservare che in questo caso è anche possibile ottenere esplicitamente le soluzioni $t \mapsto (x(t), y(t))$ del sistema considerato. Ad esempio se si vuole la soluzione con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, sostituendo $x = 1$ e $y = 2$ nella (4.3) si trova

$c = 3$, e sostituendo $y = 3x - x^2$ nella prima equazione del sistema, si trova l'equazione per $t \mapsto x(t)$

$$x' = 3x - x^2,$$

che si può risolvere per separazione di variabili

$$t + c = \int \frac{dx}{3x - x^2} = \frac{1}{3} \int dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3 - x} \right) = \frac{1}{3} \log \left| \frac{x}{3 - x} \right|$$

da cui, tenendo conto anche della condizione iniziale $x(0) = 1$, e risolvendo per x in funzione di t, e sostituendo poi il risultato in $y = x' = 3x - x^2$, si ottiene la soluzione

$$x(t) = \frac{3e^{3t}}{2 + e^{3t}}, \quad y(t) = \frac{18e^{3t}}{(2 + e^{3t})^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$