ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 14/9/2020

1. Data la funzione
$$f(x,y) = 2x^2y + x^2 - y,$$
(a) determinarne, se esistono, i punti estremali relativi e assoluti in $\mathbb{R}^2$;
(b) verificare che l'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x^2-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ è compatto;
(c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme D.

Soluzione. (a) Si ha chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque i punti estremali di f vanno ricercati tra i punti stazionari, soluzioni di
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(2y+1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$
Si hanno quindi evidentemente i due punti stazionari $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$. Per studiarne la natura, calcoliamo l'hessiana di f:
$$D^2f(x,y) = \begin{bmatrix} 4y+2 & 4x \\ 4x & 0 \end{bmatrix}.$$
Pertanto
$$D^2f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\Big) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D^2f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\Big) < 0,$$
e i punti stazionari $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ sono punti di sella. Si conclude quindi che f non ha punti estremali relativi, e quindi nemmeno assoluti.

(b) Essendo la funzione $g(x,y) = (2x^2-1)^2 + y^2$ chiaramente continua, l'insieme D, controimmagine tramite g dell'insieme chiuso $(-\infty, 1]$, è chiuso. Inoltre se $(2x^2-1)^2 + y^2 \leq 1$, deve essere sia $(2x^2-1)^2 \leq 1$ che $y^2 \leq 1$. Ma si ha
$$(2x^2-1)^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1,$$
$$y^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq y \leq 1,$$
e pertanto $D \subset [0,1] \times [-1,1]$ è anche limitato, e quindi compatto.

(c) Essendo D compatto e f continua, esistono $\max_D f$ e $\min_D f$ per il teorema di Weierstrass che devono necessariamente trovarsi su ∂D poiché, come visto, f non ha massimi né minimi relativi in $\mathbb{R}^2$, e quindi nemmeno in $\overset{\circ}{D}$. Dunque, in base al teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i punti di massimo e minimo di f in D sono da ricercarsi tra i punti non regolari di $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x^2-1)^2 + y^2 = 1\}$, e tra i punti stazionari della lagrangiana $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - 1)$. I punti non regolari di ∂D sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} g_x(x,y) = 8x(2x^2-1) = 0, \\ g_y(x,y) = 2y = 0, \\ g(x,y) = (2x^2-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
La prima equazione ha le soluzioni $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Sostituendo $x = 0$ nella terza equazione si trova $y = 0$, che soddisfa anche la seconda equazione. Sostituendo invece $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ nella terza equazione si trova $y = \pm 1$ che però è incompatibile con la seconda equazione. Dunque l'unico punto non regolare di ∂D è $(0,0)$, e si ha $f(0,0) = 0$. I punti stazionari della lagrangiana sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 2x[2y + 1 - 4\lambda(2x^2-1)] = 0, \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2x^2 - 1 - 2\lambda y = 0, \\ g(x,y) = (2x^2-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Se allora $\lambda = 0$, le prime due equazioni coincidono con quelle del sistema nel punto (a), che come visto hanno soluzioni $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, che però non soddisfano la terza equazione. Dunque $\lambda \neq 0$, e dalla seconda equazione si trova $2y = \frac{2x^2-1}{\lambda}$, che sostituita nella prima equazione dà

$$2x\left[(2x^2-1)\left(\frac{1}{\lambda} - 4\lambda\right) + 1\right] = 0.$$

La soluzione $x = 0$ di questa equazione, sostituita nella terza equazione dà $y = 0$, e si ottiene quindi il punto non regolare $(0, 0)$. L'altra soluzione è

$$2x^2 - 1 = \frac{1}{4\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{4\lambda^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2x^2-1}{2\lambda} = \frac{1}{2(4\lambda^2-1)}$$

e sostituendo nella terza equazione si ottiene

$$0 = (2x^2-1)^2 + y^2 - 1 = \frac{4\lambda^2 + 1 - 4(4\lambda^2-1)^2}{4(4\lambda^2-1)^2} = -\frac{64\lambda^4 - 36\lambda^2 + 3}{4(4\lambda^2-1)^2},$$

le cui quattro soluzioni sono

$$\lambda = \sigma_1 \frac{\sqrt{9 + \sigma_2\sqrt{33}}}{4\sqrt{2}}, \quad \sigma_1 = \pm 1, \sigma_2 = \pm 1$$

(si noti che $9 > \sqrt{33}$). Si ottiene allora per le coordinate dei quattro punti stazionari della lagrangiana

$$\begin{aligned}
4\lambda^2 - 1 &= \frac{9 + \sigma_2\sqrt{33}}{8} - 1 = \frac{1 + \sigma_2\sqrt{33}}{8} = -\frac{4}{1 - \sigma_2\sqrt{33}}, \\
2x^2 - 1 &= \frac{\lambda}{4\lambda^2 - 1} = -\frac{\sigma_1}{16\sqrt{2}}(1 - \sigma_2\sqrt{33})\sqrt{9 + \sigma_2\sqrt{33}}, \\
x^2 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_1}{16\sqrt{2}}(1 - \sigma_2\sqrt{33})\sqrt{9 + \sigma_2\sqrt{33}} - 1\right], \\
y &= \frac{1}{2(4\lambda^2-1)} = -\frac{1}{8}(1 - \sigma_2\sqrt{33}),
\end{aligned}$$

(si verifica che per ogni $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = \pm 1$, effettivamente $x^2 > 0$) e i corrispondenti valori di f sono pertanto

$$f(x, y) = (2x^2 - 1)y + x^2 = \frac{\sigma_1}{64\sqrt{2}}(15 + \sigma_2\sqrt{33})\sqrt{9 + \sigma_2\sqrt{33}} + \frac{1}{2}.$$

Si conclude che

$$\max_D f = \frac{1}{64\sqrt{2}}(15 + \sqrt{33})\sqrt{9 + \sqrt{33}} + \frac{1}{2}, \quad \min_D f = -\frac{1}{64\sqrt{2}}(15 + \sqrt{33})\sqrt{9 + \sqrt{33}} + \frac{1}{2}.$$

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \,:\, z \geq x, (x + z)^2 + 2y^2 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 2\}.$$

Soluzione. Conviene osservare preliminarmente che il dominio d'integrazione E è un sottoinsieme di

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z - x \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

che è la semisfera di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $z - x \geq 0$, e che la funzione integranda ha simmetria sferica. Si potrebbe dunque pensare che convenga usare coordinate sferiche, ma questo è complicato dalla disuguaglianza $z - x \geq 0$, che non diventa particolarmente semplice in coordinate sferiche. Si capisce allora che è meglio prima ruotare gli assi cartesiani in modo tale che il piano $z - x = 0$ divenga il piano equatoriale della sfera (e quindi la retta ad esso ortogonale sia l'asse polare delle coordinate sferiche). Tenendo allora anche conto del fatto che nella definzione di E compare anche l'espressione $(x+z)^2+2y^2$, consideriamo il cambiamento di coordinate

$$\Psi^{-1}:\begin{cases}u=\frac{x+z}{\sqrt{2}},\\ v=y,\\ w=\frac{x-z}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\Psi:\begin{cases}x=\frac{u+w}{\sqrt{2}},\\ y=v,\\ z=\frac{u-w}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\det J_\Psi=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=-1,$$

grazie al quale il dominio di integrazione si trasforma in

$$\begin{aligned}F:=\Psi^{-1}(E)=\Big\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3\,:\,&\frac{u-w}{\sqrt{2}}\geq\frac{u+w}{\sqrt{2}},\\ &2(u^2+v^2)\leq 2\left[\frac{(u+w)^2}{2}+v^2+\frac{(u-v)^2}{2}\right]\leq 2\Big\}\\ =\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3\,:\,&w\leq 0,\,u^2+v^2\leq(u^2+v^2+w^2)^2\leq 1\},\end{aligned}$$

e l'integrale da calcolare diventa

$$\iiint_F\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,dudvdw.$$

Passando ora a coordinate sferiche

$$\begin{cases}u=r\cos\phi\sin\theta,\\ v=r\sin\phi\sin\theta,\\ w=r\cos\theta,\end{cases}\qquad(r,\theta,\phi)\in[0,+\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi],$$

il dominio si trasforma in

$$G=\{(r,\theta,\phi)\,:\,r\cos\theta\leq 0,\,r^2\sin^2\theta\leq r^4\leq 1\}=\{(r,\theta,\phi)\,:\,\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi,\,\sin\theta\leq r\leq 1\}.$$

L'integrale cercato è pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\phi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\sin\theta\int_{\sin\theta}^1 dr\,r^3&=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\sin\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sin\theta}^1\\ &=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta(\sin\theta-\sin^5\theta)\\ &=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\sin\theta(1-(1-\cos^2\theta)^2)\\ &=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{0}dt\,(1-(1-t^2)^2)\\ &=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{0}dt\,(2t^2-t^4)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{7\pi}{30}.\end{aligned}$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z)=(x^2yz,-xy^2z,\log(1+x^2+y^2))$$

attraverso la superficie

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+4z^2=4,\,z\leq\tfrac{1}{2}\},$$

orientata in maniera tale che il versore normale positivo nel punto $(2,0,0)$ sia $n_+=(1,0,0)$.

Soluzione. La superficie Σ è la parte dell'ellissoide con centro l'origine e semiassi $2,2,1$ che si trova al di sotto del piano di equazione $z=\frac{1}{2}$. Per ottenere una superficie senza bordo, aggiungiamo allora a Σ la parte di tale piano interna all'ellissoide:

$$\Sigma_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+4z^2\leq 4,\,z=\tfrac{1}{2}\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2\leq 3,\,z=\tfrac{1}{2}\}.$$

In tal modo $\Sigma\cup\Sigma_0=\partial D$, con

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+4z^2\leq 4,\,z\leq\tfrac{1}{2}\},$$

e, osservando che il vettore n_+ punta all'esterno di D, dal teorema della divergenza si ha

$$\iint_\Sigma\langle F,n_+\rangle\,dS=\iiint_D\operatorname{div}F\,dxdydz-\iint_{\Sigma_0}\langle F,n_+\rangle\,dS,$$

dove su Σ_0 ovviamente $n_+ = (0,0,1)$. Essendo inoltre

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(\log(1+x^2+y^2)) = 0,$$

risulta, usando coordinate polari e integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \langle F, n_+\rangle\, dS &= -\iint_{\Sigma_0} \langle F, n_+\rangle\, dS = -\iint_{\{x^2+y^2\le 3\}} \log(1+x^2+y^2)\, dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr\, r\log(1+r^2) = (t=r^2) - \pi\int_0^3 dt\, \log(1+t) \\
&= -\pi\left\{[t\log(1+t)]_0^3 - \int_0^3 dt\, \frac{t}{1+t}\right\} = -\pi\left\{3\log 4 - [t-\log(1+t)]_0^3\right\} \\
&= \pi[3-4\log 4].
\end{aligned}$$

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2t}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$ ha chiaramente la radice $\lambda_1 = 1$, e si fattorizza quindi come $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$, e dunque ha le due radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ rispettivamente. L'integrale generale dell'equazione omogenea è pertanto

$$y_o(t) = c_1e^t + (c_2 + c_3t)e^{2t}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Inoltre, poiché il termine noto è della forma $f(t) = e^{\alpha t}$ con $\alpha = 2 = \lambda_2$ radice di molteplicità $n_2 = 2$ di p, in base al metodo di similitudine una soluzione particolare dell'equazione non omogenea sarà della forma $y_p(t) = at^{n_2}e^{\alpha t} = at^2e^{2t}$, con $a\in\mathbb{R}$ costante da determinarsi. A tale scopo calcoliamo le derivate di y_p:

$$y_p'(t) = 2a(t+t^2)e^{2t}, \quad y_p''(t) = 2a(1+4t+2t^2)e^{2t}, \quad y_p'''(t) = 2a(6+12t+4t^2)e^{2t}.$$

Pertanto:

$$y_p'''(t) - 5y_p''(t) + 8y_p'(t) - 4y_p(t) = 2ae^{2t} = e^{2t}$$

da cui $a = \frac{1}{2}$, e l'integrale generale dell'equazione non omogenea risulta

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = c_1e^t + \left(c_2 + c_3t + \frac{t^2}{2}\right)e^{2t}.$$

Imponiamo infine le condizioni iniziali. Si ha $y(0) = c_1 + c_2 = 1$, da cui $c_2 = 1 - c_1$, e sostituendo questo nell'espressione per $y(t)$ e derivando

$$y'(t) = c_1e^t + (c_3 + 2 - 2c_1 + (2c_3+1)t + t^2)e^{2t} \quad\Rightarrow\quad y'(0) = 2 - c_1 + c_3 = 0,$$

da cui $c_3 = c_1 - 2$, e sostituendo ancora quest'ultima equazione in $y'(t)$ e derivando

$$y''(t) = c_1e^t + (-3 + 4(c_1-1)t + 2t^2)e^{2t} \quad\Rightarrow\quad y'(0) = c_1 - 3 = 0,$$

da cui $c_1 = 3$, $c_2 = 1 - c_1 = -2$ e $c_3 = c_1 - 2 = 1$, e la soluzione cercata è

$$y(t) = 3e^t - \left(2 - t - \frac{t^2}{2}\right)e^{2t}.$$