ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 31/8/2020

1. Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)|y|^\alpha \log(x^2+2y^2)}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq 0$.
Soluzione. In base ai teoremi generali, la funzione data è continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per studiare la continuità in $(0,0)$, usiamo coordinate polari:

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{(1+r\cos\theta)r^\alpha |\sin\theta|^\alpha \log(r^2(1+\sin^2\theta))}{r^2(1+\cos^2\theta)} \\ &= r^{\alpha-2}[2\log r + \log(1+\sin^2\theta)] \frac{(1+r\cos\theta)|\sin\theta|^\alpha}{1+\cos^2\theta} \end{aligned}$$

da cui, se $\alpha - 2 \leq 0$, si ha, per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ fissato,

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\infty,$$

e dunque f non è continua in $(0,0)$ per $0 \leq \alpha \leq 2$. Se invece $\alpha > 2$, si ha, per ogni $\theta \in [0, 2\pi 9$,

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| &\leq r^{\alpha-2}[2|\log r| + |\log(1+\sin^2\theta)|] \frac{(1+r|\cos\theta|)|\sin\theta|^\alpha}{1+\cos^2\theta} \\ &\leq r^{\alpha-2}[2|\log r| + \log 2](1+r), \end{aligned}$$

dove nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che, essendo $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ ed essendo il logaritmo crescente, vale $|\log(1+\sin^2\theta)| = \log(1+\sin^2\theta) \leq \log 2$, e il fatto che $1+\cos^2\theta \geq 1$. Poiché allora l'ultimo membro dell'equazione precedente non dipende da θ ed è infinitesimo per $r \to 0^+$ (grazie al limite notevole $\lim_{t\to 0^+} t^\beta \log t = 0$ per ogni $\beta > 0$), si conclude che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, e dunque f è continua in $(0,0)$ se $\alpha > 2$.

Per studiare la derivabilità di f in $(0,0)$ calcoliamo il limite dei rapporti incrementali rispetto alle due variabili. Si ha

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{(x+1)\log(x^2)}{2x^2} & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha > 0, \end{cases}$$

e pertanto

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \begin{cases} \nexists & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Inoltre, usando ancora $\lim_{t\to 0^+} t^\beta \log t = 0$ per ogni $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^\alpha \log(2y^2)}{y^3} \\ &= \lim_{y\to 0} \operatorname{sgn} y\, |y|^{\alpha-3}[2\log|y| + \log 2] = \begin{cases} \nexists & \text{se } \alpha \leq 3, \\ 0 & \text{se } \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Infine, da quanto appena visto, f non è differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha \leq 3$, poiché non è derivabile. Se $\alpha > 3$, in base alla definizione bisogna calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+1)|y|^\alpha \log(x^2+2y^2)}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

e con passaggi analoghi a quelli fatti nell studio della continuità si ha, in coordinate polari,

$$\left|\frac{(x+1)|y|^\alpha \log(x^2+2y^2)}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{(1+r\cos\theta)r^\alpha|\sin\theta|^\alpha \log(r^2(1+\sin^2\theta))}{r^3(1+\cos^2\theta)}\right|$$
$$\leq r^{\alpha-3}[2|\log r|+\log 2](1+r) \to 0 \qquad \text{per } r \to 0^+,$$

e dunque f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{|x-y|^\alpha}$$

è sommabile nel triangolo E di vertici $(0,1)$, $(0,-1)$ e $(-1,0)$, e, se possibile, calcolare $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Soluzione. Se $\alpha \geq 0$, il denominatore della funzione considerata si annulla sulla retta $y = x$, e dunque f non è limitata in ogni intorno di tale retta. Osservando che la retta di equazione $y = x+1$ unisce i punti $(-1,0)$ e $(0,1)$ e quella di equazione $y = -x-1$ i punti $(-1,0)$ e $(0,-1)$, si vede che l'insieme di integrazione si può scrivere

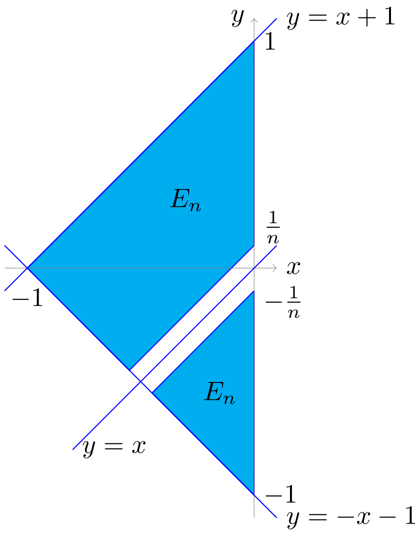
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0,\, -x-1 \leq y \leq x+1\},$$

e introducendo dunque gli insiemi (misurabili)

$$E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0,\, -x-1 \leq y \leq x+1, |x-y| \geq \tfrac{1}{n}\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

(E_n è cioè l'unione dei due insiemi colorati in fig. 1) si ha che f è continua su E_n, $E_n \subset E_{n+1}$,

Figura 1



e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$, e dunque

$$\iint_E \frac{|x+y|}{|x-y|^\alpha}dxdy = \lim_{n\to+\infty}\iint_{E_n}\frac{|x+y|}{|x-y|^\alpha}dxdy.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, conviene utilizzare il cambiamento di variabili

$$\Psi^{-1} : \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Psi : \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \qquad \det J_\Psi = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2},$$

tramite il quale l'insieme di integrazione diventa

$$D_n = \Psi^{-1}(E_n) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \leq u+v \leq 0, -u-v-2 \leq u-v \leq u+v-2, |v| \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Essendo allora

$$
\begin{aligned}
-2 \le u+v \le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -u-2 \le v \le -u,\\
-u-v-2 \le u-v \quad &\Leftrightarrow \quad u \ge -1,\\
u-v \le u+v-2 \quad &\Leftrightarrow \quad v \ge -1,
\end{aligned}
$$

e tenendo conto che $u \ge -1$ implica $-u-2 \le -1 \le v$, si deduce che D_n si può riscrivere

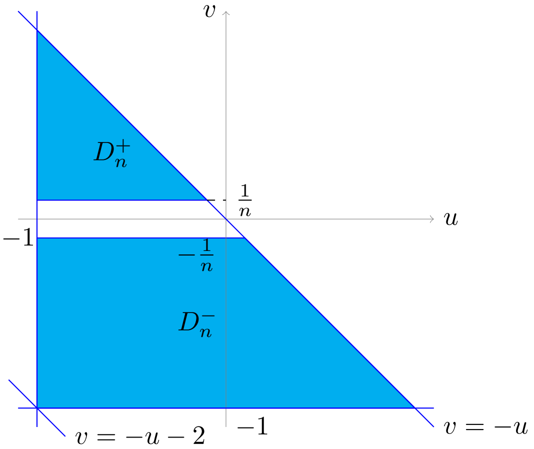
$$
D_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, v \le -u,\, u \ge -1,\, v \ge -1, |v| \ge \tfrac{1}{n}\} = D_n^+ \cup D_n^-,
$$

dove

$$
\begin{aligned}
D_n^+ &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \tfrac{1}{n} \le v \le 1,\, -1 \le u \le -v\},\\
D_n^- &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le v \le -\tfrac{1}{n},\, -1 \le u \le -v\}
\end{aligned}
$$

(vedere fig. 2). Poiché allora tali insiemi sono normali rispetto a v, si ha

Figura 2



$$
\begin{aligned}
\iint_{E_n} \frac{|x+y|}{|x-y|^\alpha} dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{D_n} \frac{|u|}{|v|^\alpha} dudv = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{dv}{|v|^\alpha} \int_{-1}^{-v} du\, |u| + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{|v|^\alpha} \int_{-1}^{-v} du\, |u|\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{dv}{|v|^\alpha}\left(-\int_{-1}^{0} du\, u + \int_{0}^{-v} du\, u\right) - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{|v|^\alpha} \int_{-1}^{-v} du\, u\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{dv}{|v|^\alpha}(1+v^2) - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{|v|^\alpha}(v^2-1)\right] = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{v^\alpha},
\end{aligned}
$$

dove nell'ultima uguaglianza si è effettuato il cambiamento di variabili $v \to -v$ nel primo integrale. Poiché la funzione $v \mapsto \frac{1}{v^\alpha}$ è integrabile intorno a $v=0$ per $\alpha < 1$, si conclude che f è sommabile in E se e solo se $\alpha < 1$.

Posto $\alpha = \frac{1}{2}$, si ha allora, da quanto visto sopra,

$$
\begin{aligned}
\iint_{E} \frac{x+y}{|x-y|^{1/2}} dxdy &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \iint_{D_n} \frac{u}{|v|^{1/2}} dudv\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{dv}{|v|^{1/2}} \int_{-1}^{-v} du\, u + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{|v|^{1/2}} \int_{-1}^{-v} du\, u\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{dv}{|v|^{1/2}}(v^2-1) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{|v|^{1/2}}(v^2-1)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{v^{1/2}}(v^2-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{1}{n}}^{1} dv\, v^{3/2} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dv}{v^{1/2}}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\, v^{5/2}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} - 2\, v^{1/2}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1}\right] = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

3. Calcolare l'integrale curvilieno del campo vettoriale
$$F(x,y,z) = (2xy\cos(x^2y), x^2\cos(x^2y) + xz\sin^3 y, xy\sin^3 z)$$
sulla spezzata orientata di vertici consecutivi $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,\frac{\pi}{2},1)$.
Soluzione. Conviene usare direttamente la definizione di integrale curvilineo. Parametrizziamo i segmenti della spezzata al modo seguente:
$$\begin{aligned} \text{segmento } [(0,0,0),(1,0,0)]: &\quad \gamma_1(t) := (t,0,0), \quad t\in[0,1],\\ \text{segmento } [(1,0,0),(1,0,1)]: &\quad \gamma_2(t) := (1,0,t), \quad t\in[0,1],\\ \text{segmento } [(1,0,1),(1,\tfrac{\pi}{2},1)]: &\quad \gamma_3(t) := (1,t,1), \quad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$
Indicando allora con $\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ tutta la spezzata si ha
$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_{\gamma_1}\langle F, ds\rangle + \int_{\gamma_2}\langle F, ds\rangle + \int_{\gamma_3}\langle F, ds\rangle$$
e posto $F = (P,Q,R)$,
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1}\langle F, ds\rangle &= \int_0^1 \langle F(t,0,0),(1,0,0)\rangle dt = \int_0^1 P(t,0,0)dt = 0,\\ \int_{\gamma_2}\langle F, ds\rangle &= \int_0^1 \langle F(1,0,t),(0,0,1)\rangle dt = \int_0^1 R(1,0,t)dt = 0,\\ \int_{\gamma_3}\langle F, ds\rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(1,t,1),(0,1,0)\rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q(1,t,1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos t + \sin^3 t]\, dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\sin t dt = (u=\cos t) = 1 + \int_0^1 (1-u^2)du = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$
e dunque $\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \frac{5}{3}$.

4. Risolvere il probelma di Cauchy
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3,\\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3,\\ y_3' = 2y_3,\\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 2. \end{cases}$$
Soluzione. Calcoliamo gli autovalori della matrice A dei coefficienti del sistema. Sviluppando il determinante lungo la terza riga si ottiene
$$\begin{aligned} \det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]\\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-2)^3, \end{aligned}$$
e quindi l'unico autovalore è $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica 3. Per determinarne la molteplicità geometrica, e la forma canonica di Jordan di A, calcoliamo
$$A - 2\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
che ha rango 1 (due righe uguali e una di zeri), e pertanto la forma canonica di Jordan di A è
$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$
e $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 2. Essendo poi $(A-2\mathbb{1})^2 = 0$, l'autovettore generalizzato v_3 di A deve allora soddisfare
$$0 \neq (A-2\mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z\\ x-y+z\\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè $y \neq x+z$, e si può pertanto scegliere $v_3 = (1,0,0)$. Ne segue che $v_2 = (A-2\mathbb{1})v_3 = (1,1,0)$ è un autovettore di A, e un altro autovettore v_1 linearmente indipendente da v_2 si ottiene risolvendo

$$(A-2\mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x-y+z \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

e si può quindi scegliere $v_1 = (0,1,1)$. Essendo allora

$$e^{tA}v_1 = e^{2t}v_1, \quad e^{tA}v_2 = e^{2t}v_2, \quad e^{tA}v_3 = e^{2t}(v_3 + tv_2),$$

l'integrale generale del sistema sarà

$$y(t) = e^{tA}[c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3] = e^{2t}[c_1v_1 + (c_2 + c_3t)v_2 + c_3v_3] = e^{2t} \begin{bmatrix} c_2 + c_3(1+t) \\ c_1 + c_2 + c_3t \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo infine le condizioni iniziali si ricava

$$y(0) = \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

da cui $c_1 = 2$, $c_2 = 1 - c_1 = -1$, $c_3 = -c_2 = 1$, e pertanto la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1+t \\ 2 \end{bmatrix}.$$