ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 10/7/2020

1. Data la funzione

$$F(x,y) = x + 3x^2y^3 + \int_0^y \arctan(1+2t\cos y)\,dt,$$

(a) verificare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ nell'intorno del punto $(0,0)$;
(b) calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{4}{\pi}x}{x^2}.$$

Soluzione. (a) Si ha chiaramente $F(0,0) = 0$. Inoltre in base al teorema di derivazione sotto il segno di integrale la funzione

$$g(y) := \int_0^y \arctan(1+2t\cos y)\,dt$$

è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, con derivata

$$g'(y) = \arctan(1+2y\cos y) - \int_0^y \frac{2t\sin y}{1+(1+2t\cos y)^2}dt.$$

Essendo allora il polinomio $x + 3x^2y^3$ infinitamente derivabile in $\mathbb{R}^2$, la funzione $F(x,y) = x + 3x^2y^3 + g(y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$ e derivabile rispetto a y con derivata

$$F_y(x,y) = 9x^2y^2 + g'(y) \quad\Rightarrow\quad F_y(0,0) = g'(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Essendo dunque verificate le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0,0)$, l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ nell'intorno di tale punto.

(b) La funzione F è chiaramente derivabile rispetto a x in $\mathbb{R}^2$, con derivata

$$F_x(x,y) = 1 + 6xy^3,$$

chiaramente continua, e, sempre dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, la funzione g' è anch'essa continua. Dunque $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e pertanto, ancora grazie al teorema della funzione implicita, anche f è di classe C^1 nel suo insieme di definizione e $f'(x) = -F_x(x,f(x))/F_y(x,f(x))$. Pertanto, essendo $f(0) = 0$, si avrà

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{4}{\pi},$$

dove la terza uguaglianza è conseguenza della regola di de l'Hopital e la quarta della continuità di f'. Infine con ragionamenti analoghi a quelli fatti sopra si vede anche che $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e pertanto f è anch'essa di classe C^2 e, applicando la regola di de l'Hopital due volte,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{4}{\pi}x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+\frac{4}{\pi}}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(x) = \frac{1}{2}f''(0).$$

Allo scopo di determinare $f''(0)$, calcoliamo la derivata rispetto a x dell'identità $F_x(x,f(x)) + F_y(x,f(x))f'(x) = 0$ per $x = 0$. Tenendo conto che $f(0) = 0$ e usando la regola della catena, si ha

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dx}[F_x(x,f(x)) + F_y(x,f(x))f'(x)]\Big|_{x=0}\\ &= F_{xx}(0,0) + 2F_{xy}(0,0)f'(0) + F_{yy}(0,0)f'(0)^2 + F_y(0,0)f''(0).\end{aligned}$$

Inoltre

$$F_{xx}(x,y) = 6y^3 \quad \Rightarrow \quad F_{xx}(0,0) = 0,$$
$$F_{xy}(x,y) = 18xy^2 \quad \Rightarrow \quad F_{xy}(0,0) = 0,$$
$$F_{yy}(x,y) = 18x^2y + 2\frac{\cos y - y\sin y}{1+(1+2y\cos y)^2} - \frac{2y\sin y}{1+(1+2y\cos y)^2} - \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}\frac{2t\sin y}{1+(1+2t\cos y)^2}dt$$
$$\Rightarrow F_{yy}(0,0) = 1,$$

e sostituendo allora nell'equazione precedente si trova

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{4}{\pi}x}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) = -\frac{f'(0)^2}{2F_y(0,0)} = -\frac{32}{\pi^3}.$$

2. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 0\le x,y,z\le 1,\ x+y>z,\ y+z>x,\ z+x>y\}.$$

Soluzione. Conviene integrare per strati. A tale scopo, sezionando l'insieme dato con un piano parallelo al piano xy, si ottiene l'insieme

$$E_z := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x,y\le 1,\ x+y>z, y-x>-z, y-x<z\}$$

e poiché

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y>z & \Leftrightarrow & y>-x+z \\ y-x>-z & \Leftrightarrow & y>x-z \\ & & y>0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y>|x-z|$$
$$\left.\begin{array}{rcr} y-x<z & \Leftrightarrow & y<x+z \\ & & y<1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y<\min\{x+z,1\},$$

tale insieme si può riscrivere come

$$E_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x\le 1, |x-z|<y<\min\{x+z,1\}\},$$

da cui è evidente che si tratta di un insieme normale rispetto all'asse x. Dunque l'insieme dato è della forma

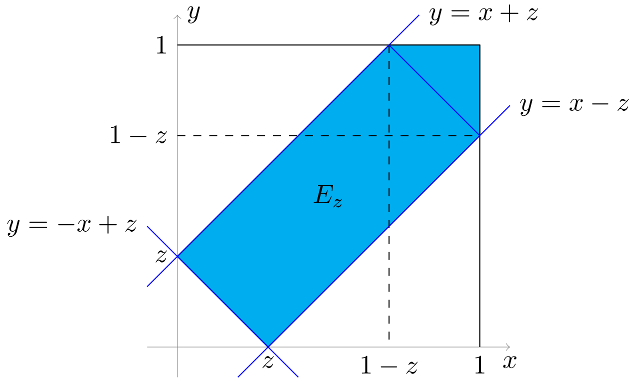
$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 0\le z\le 1,\ (x,y)\in E_z\},$$

ed è quindi normale rispetto al piano xy, e si può effettivamente integrare per strati, ottenendo

$$|E| = \int_0^1 dz\,|E_z|.$$

Per calcolare l'area di E_z, osserviamo che la retta $y=x+z$ interseca l'asse y nel punto $(0,z)$, e la retta $y=1$ nel punto $(1-z,1)$, mentre il grafico della funzione $x\mapsto|x-z|$ interseca l'asse y nel punto $(0,z)$, l'asse x nel punto $(z,0)$, e la retta $x=1$ nel punto $(1,1-z)$. Dunque E_z è l'insieme

Figura 1



colorato in fig. 1, ed è l'unione del rettangolo di vertici $(0, z)$, $(z, 0)$, $(1, 1 - z)$ e $(1 - z, 1)$, che ha area

$$\begin{aligned}\|(0, z) - (z, 0)\| \|(z, 0) - (1, 1 - z)\| \\ &= \sqrt{(0 - z)^2 + (z - 0)^2} \cdot \sqrt{(z - 1)^2 + (0 - (1 - z))^2} = 2z(1 - z),\end{aligned}$$

e del triangolo rettangolo di vertici $(1, 1 - z)$, $(1 - z, 1)$ e $(1, 1)$, che ha area

$$\frac{1}{2}\|(1, 1) - (1, 1 - z)\|\|(1, 1) - (1 - z, 1)\| = \frac{z^2}{2}.$$

Dunque $|E_z| = 2z(1 - z) + \frac{z^2}{2} = 2z - \frac{3}{2}z^2$ e

$$|E| = \int_0^1 \left(2z - \frac{3}{2}z^2\right) dz = \left[z^2 - \frac{1}{2}z^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^\alpha + 1}}{\log(e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}})}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Poiché $e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}} \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie considerata è a termini positivi, e dunque converge assolutamente se e solo se converge semplicemente. Sia $\alpha > 0$. Allora $n^\alpha \to +\infty$ e $n^{-\alpha} \to 0$ per $n \to +\infty$. Pertanto, per $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^\alpha + 1} &= n^{\alpha/2}\sqrt{1 + n^{-\alpha}} = n^{\alpha/2}(1 + o(1)),\\ \log(e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}}) &= \log(e^{n^\alpha}(1 + e^{n^{-\alpha} - n^\alpha})) = n^\alpha + \log(1 + e^{n^{-\alpha} - n^\alpha}) = n^\alpha(1 + o(1)),\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $e^{n^{-\alpha} - n^\alpha} \to 0$. Di conseguenza

$$\frac{\sqrt{n^\alpha + 1}}{\log(e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}})} = \frac{1}{n^{\alpha/2}}(1 + o(1)),$$

e pertanto la serie data converge per $\alpha/2 > 1$, cioè per $\alpha > 2$, e diverge per $0 < \alpha \leq 2$ per il criterio del confronto asintotico. Se poi $\alpha = 0$ il termine generico della serie è costantemente uguale a $\frac{1}{\log 2}$, e pertanto la serie è divergente. Se infine $\alpha < 0$ si avrà $n^\alpha \to 0$ e $n^{-\alpha} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Dunque, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}&\sqrt{1 + n^\alpha} \to 1,\\ &\log(e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}}) = n^{-\alpha} + \log(1 + e^{n^\alpha - n^{-\alpha}}) = n^{-\alpha}(1 + o(1)),\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{n^\alpha + 1}}{\log(e^{n^\alpha} + e^{n^{-\alpha}})} = \frac{1}{n^{-\alpha}}(1 + o(1)),$$

e, sempre in base al criterio del confronto asintotico, la serie converge se $-\alpha > 1$, cioè $\alpha < -1$, e diverge se $-1 \leq \alpha < 0$. In conclusione, la serie data converge (semplicemente e assolutamente) se e solo se $\alpha < -1$ o $\alpha > 2$.

4. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \frac{xy^2}{1+x^2}, \end{cases}$$

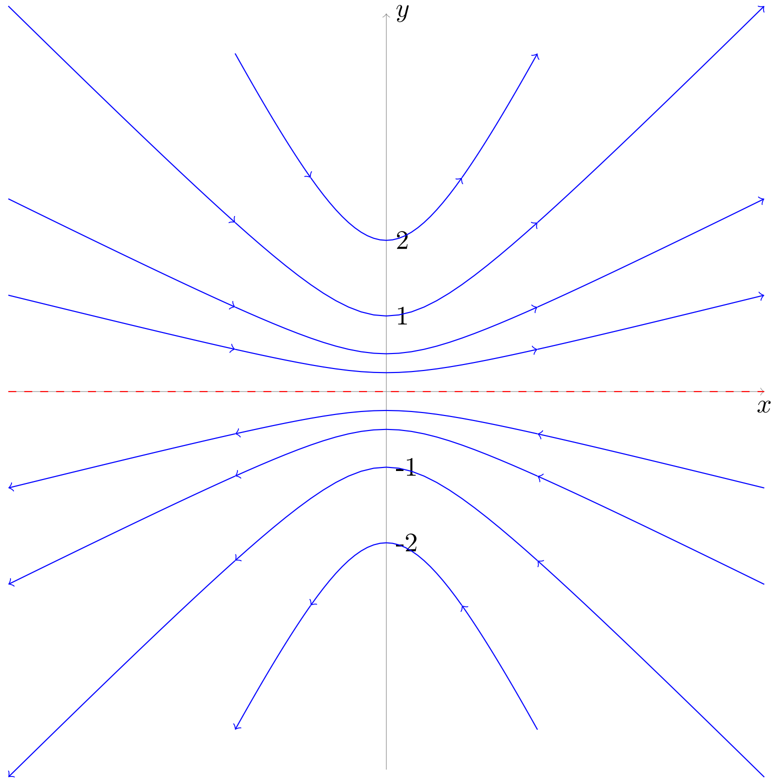
(a) se ne determinino i punti stazionari, e se ne studi la stabilità (eventualmente tracciandone il diagramma di fase);

(b) se ne determini la soluzione soddisfacente le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Soluzione. (a) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0, \\ \frac{xy^2}{1+x^2} = 0, \end{cases}$$

Figura 2



e dunque sono tutti i punti della forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ (cioè i punti dell'asse x). Per studiarne la stabilità, calcoliamo lo jacobiano della funzione vettoriale definita dai secondi membri delle equazioni del sistema, $f(x, y) = (y, \frac{xy^2}{1+x^2})$. Si ottiene

$$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y^2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & \frac{2xy}{1+x^2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_f(x, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque gli autovalori di $J_f(x, 0)$ sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, e non danno informazioni circa la stabilità dei punti stazionari. Conviene allora cercare di determinare il diagramma di fase del sistema. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{xy}{1+x^2},$$

che risolta per separazione di variabili dà

$$\log|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

da cui, esponenziando, si ottengono le curve di fase

$$(\bullet) \qquad y = \pm|y| = \pm C\sqrt{1+x^2}$$

con $C > 0$. Poiché inoltre $x' = y$, tali curve sono percorse nel verso delle x crescenti nel semipiano superiore ($y > 0$), e nel verso delle x decrescenti in quello inferiore. Si ottiene dunque il diagramma di fase mostrato in fig. 2, da cui si deduce che i punti stazionari $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, sono tutti instabili.

(b) Sostituendo il dato iniziale $x = 0$, $y = 1$ nella $(\bullet)$ si ottiene $C = 1$, e dunque la curva di fase descritta dalla soluzione cercata ha equazione $y = \sqrt{1+x^2}$. Sostituendo dunque quest'ultima nella prima equazione del sistema si ottiene

$$x' = \sqrt{1+x^2}$$

che risolta per separazione di variabili fornisce

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int dt = t + c,$$

e dovendo essere $x = 0$ per $t = 0$ si ottiene $c = 0$. Ricordando allora che $\log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \sinh^{-1} x$, si ricava la soluzione

$$x(t) = \sinh t, \quad y(t) = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t.$$