ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 25/6/2020

1. Data la funzione

$$f(x,y,z) = (z-1)^2(2z+1)(x^4 - 4xy + 2y^2),$$

se ne determinino:

(a) gli eventuali punti stazionari nell'insieme aperto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > -\frac{1}{4}\}$, e la loro natura;

(b) il massimo e il minimo assoluti in D, se esistono.

Soluzione. (a) I punti stazionari di f sono quelli in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = (z-1)^2(2z+1)(4x^3 - 4y) = 0, \\ f_y(x,y,z) = (z-1)^2(2z+1)(-4x+4y) = 0, \\ f_z(x,y,z) = 6z(z-1)(x^4 - 4xy + 2y^2) = 0. \end{cases}$$

È allora chiaro che per $z = 1$ tutte le equazioni diventano l'identità $0 = 0$ qualunque siano $x, y \in \mathbb{R}$, cioè tutti i punti $(x, y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, sono punti stazionari di f. Sia allora $z \neq 1$. Dalla seconda equazione, tenendo conto che $2z + 1 \neq 0$ per $z > -\frac{1}{4}$, si ricava $x = y$, che sostituita nella prima fornisce $4x(x^2 - 1) = 0$, che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \pm 1$. Se $x = y = 0$ la terza equazione è verificata per ogni $z \in \mathbb{R}$, e pertanto tutti i punti $(0, 0, z)$, $z > -\frac{1}{4}$, sono stazionari. Infine sostituendo $x = y = \pm 1$ nella terza equazione si ottengono i due punti stazionari $(\pm 1, \pm 1, 0)$.

Per studiare la natura di questi punti stazionari, calcoliamo l'hessiana di f, che risulta essere

$$D^2f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 12(z-1)^2(2z+1)x^2 & -4(z-1)^2(2z+1) & 6z(z-1)(4x^3-4y) \\ -4(z-1)^2(2z+1) & 4(z-1)^2)(2z+1) & 6z(z-1)(4y-4x) \\ 6z(z-1)(4x^3-4y) & 6z(z-1)(4y-4x) & 6(2z-1)(x^4-4xy+2y^2) \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$D^2f(\pm 1, \pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

e poiché tale matrice è diagonale a blocchi, si ha

$$\det(D^2f(\pm 1, \pm 1, 0) - \lambda \mathbb{1}\,) = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \mathbb{1}\right)(6 - \lambda)$$

e dunque gli autovalori di $D^2f(\pm 1, \pm 1, 0)$ sono $\lambda_1 = 6$, e i due autovalori della matrice 2x2 $A = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. Essendo allora $\det A = 48 - 16 > 0$ e $\operatorname{tr} A = 16 > 0$, tali autovalori sono entrambi positivi. Dunque $D^2f(\pm 1, \pm 1, 0)$, avendo tre autovalori positivi, è definita positiva, e quindi i punti $(\pm 1, \pm 1, 0)$ sono minimi relativi. Si ha poi

$$D^2f(0,0,z) = \begin{bmatrix} 0 & -4(z-1)^2(2z+1) & 0 \\ -4(z-1)^2(2z+1) & 4(z-1)^2)(2z+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e ragionando analogamente a prima tale matrice ha un autovalore $\lambda_1 = 0$, ed essendo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -4(z-1)^2(2z+1) \\ -4(z-1)^2(2z+1) & 4(z-1)^2)(2z+1) \end{bmatrix} = -16(z-1)^4(2z+1)^2 < 0$$

se $z > -\frac{1}{4}$, $z \neq 1$, si conclude che gli altri due autovalori di $D^2f(0,0,z)$ sono uno positivo ed uno negativo, e quindi i punti stazionari $(0,0,z)$, $z > -\frac{1}{4}$, $z \neq 1$, sono selle. Infine si ha

$$D^2f(x,y,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6(x^4 - 4xy + 2y^2) \end{bmatrix},$$

che, essendo diagonale, ha due autovalori nulli e uno con lo stesso segno di $x^4 - 4xy + 2y^2$. Pertanto la matrice è semidefinita, e non dà informazioni circa la natura del punto stazionario. Osserviamo però che $f(x,y,1) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Considerata allora la funzione continua $g(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ e dato un punto $(x_0, y_0, 1)$ tale che $g(x_0, y_0) > 0$ si avrà, per continuità, $g(x,y) > 0$ in un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0). Essendo poi $(z-1)^2(2z+1) \geq 0$ per ogni $z > -\frac{1}{4}$, si ottiene $f(x,y,z) = (z-1)^2(2z+1)g(x,y) \geq 0 = f(x_0,y_0,1)$ per ogni $(x,y,z) \in U \times (-\frac{1}{4}, +\infty)$, che è un intorno di $(x_0, y_0, 1)$, che è dunque un punto di minimo relativo. Analogamente i punti $(x_0, y_0, 1)$ tali che $g(x_0, y_0) < 0$ sono punti di massimo relativo, e quelli tali che $g(x_0, y_0) = 0$ sono punti di sella.

(b) Essendo D aperto, gli eventuali massimi e minimi assoluti di f in D devono essere anche rispettivamente massimi e minimi relativi, e dunque, in base a quanto visto al punto (a), devono trovarsi tra i punti del tipo $(x,y,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, oppure tra i punti $(\pm 1, \pm 1, 0)$. Ma per quanto visto sopra $f(x,y,1) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e la funzione f assume valori strettamente positivi nell'intorno di quelli di questi punti che sono minimi relativi e valori strettamente negativi nell'intorno di quelli che sono massimi relativi. Se ne conclude che nessuno di questi punti è un massimo o un minimo assoluto. Inoltre

$$\lim_{z\to+\infty} f(\pm 1, \pm 1, z) = \lim_{z\to+\infty} -(z-1)^2(2z+1) = -\infty,$$

e dunque i punti $(\pm 1, \pm 1, 0)$ sono minimi relativi ma non assoluti. Dunque f non ha punti di massimo né di minimo assoluto in D.

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_E \frac{z-2}{1+x^2+y^2} dxdydz,$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \leq (z-2)^2, \, 0 \leq z \leq 1\}$.

Soluzione. In coordinate cilindriche, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, l'insieme E si trasforma in

$$D = \{(r,\theta,z) : r^2 \leq (z-2)^2, 0 \leq z \leq 1\} = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 2-z, 0 \leq z \leq 1\},$$

e l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{z-2}{1+x^2+y^2} dxdydz &= \iiint_D \frac{z-2}{1+r^2} \cdot r dr d\theta dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-z} \frac{(z-2)r}{1+r^2}\, dr d\theta dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{z-2}{2} \left[\log(1+r^2)\right]_0^{z-2} \, d\theta dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{z-2}{2} \log(1+(z-2)^2) \, d\theta dz \\
&= \pi \int_0^1 (z-2)\log(1+(z-2)^2)\, dz.
\end{aligned}$$

Usando allora la sostituzione $u = z-2$ e osservando che $\frac{d}{du}(u^2) = 2u$ e $\int \log(1+t)dt = (1+t)\log(1+t) - t$:

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^1 (z-2)\log(1+(z-2)^2)\, dz &= \pi \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} \cdot 2u \log(1+u^2)\, dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[(1+u^2)\log(1+u^2) - u^2\right]_{-2}^{-1} \\
&= \frac{\pi}{2} \left[(2\log 2 - 1) - (5\log 5 - 4)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}(3 + 2\log 2 - 5\log 5).
\end{aligned}$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (xy^2, xy(1-x), z(x^2-y^2-x+1)),$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2+y^2}{4} + 4z^2 = 1,\, (x-1)^2 + y^2 \le 1,\, z \ge 0 \right\},$$

orientata in modo che il versore normale nel punto $(1, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$ abbia terza componente positiva.
Soluzione. La superficie Σ è la parte dell'ellissoide centrato nell'origine e con semiassi $2, 2, \frac{1}{2}$, di equazione $\frac{x^2+y^2}{4} + 4z^2 = 1$, contenuta all'interno del cilindro di raggio 1 e asse la retta $x = 1$, $y = 0$, di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$, e nel semispazio $z \ge 0$. Considerando allora la parte del cilindro (pieno) contenuta all'interno dell'ellissoide e nel semispazio $z \ge 0$,

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2+y^2}{4} + 4z^2 \le 1,\, (x-1)^2 + y^2 \le 1,\, z \ge 0 \right\},$$

si ha $\partial E = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2+y^2}{4} + 4z^2 \le 1,\, (x-1)^2 + y^2 = 1,\, z \ge 0 \right\}$$

è la parte della superficie laterale del cilindro contenuta all'interno dell'ellissoide e nel semispazio $z \ge 0$, mentre

$$\Sigma_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 1,\, z = 0 \right\}$$

è la base del cilindro sul piano xy. Dal teorema della divergenza si ha allora

$$\iiint_E \mathrm{div} F \, dxdydz = \iint_\Sigma \langle F, n \rangle dS + \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1 \rangle dS + \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2 \rangle dS.$$

Si ha allora $\mathrm{div} F = y^2 + x(1-x) + x^2 - y^2 - x + 1 = 1$, e in coordinate cilindriche l'insieme E diventa

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (r,\theta,z) \,:\, \frac{r^2}{4} + 4z^2 \le 1,\, r^2 - 2r\cos\theta \le 0,\, z \ge 0 \right\} \\ &= \left\{ (r,\theta,z) \,:\, 0 \le z \le \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}},\, 0 \le r \le 2\cos\theta,\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}, \end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \iiint_E \mathrm{div} f \, dxdydz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} dr\, r \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} dr\, r \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} = \left(t = \frac{r^2}{4} \right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos^2\theta} dt\, \sqrt{1-t} \\ &= -\frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta [(1-\cos^2\theta)^{3/2} - 1] \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta [\sin^3\theta - 1] = (u = \cos\theta) \\ &= -\frac{4}{3} \left[\int_0^1 du (1-u^2) - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

D'altra parte la superficie Σ_1 è contenuta nella superficie di livello $\{(x,y,z) \,:\, g(x,y,z) = 1\}$ della funzione $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2$, e dunque il suo versore normale si può scrivere come

$$n_1 = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|} = \frac{(2(x-1), 2y, 0)}{\sqrt{4(x-1)^2 + 4y^2}} = ((x-1), y, 0),$$

e pertanto

$$\langle F, n_1 \rangle = xy^2(x-1) + xy(1-x)y = 0 \;\Rightarrow\; \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1 \rangle dS = 0.$$

Infine chiaramente $n_2 = (0, 0, -1)$ e dunque su Σ_2 si ha $\langle F, n_2 \rangle = -F_z(x, y, 0) = 0$ e $\iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2 \rangle dS = 0$. In conclusione il flusso richiesto è

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n \rangle dS = \iiint_E \mathrm{div} F \, dxdydz = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}.$$

4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - y_3 + t - e^{-2t}, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - y_3 + t - e^{-2t}, \\ y_3' = y_1 - y_2 + t, \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. Determiniamo gli autovalori della matrice dei coefficienti A del sistema:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0,$$

che ha ovviamente le soluzioni $\lambda_1 = 0$ (semplice) e $\lambda_2 = 1$ (doppia). L'autovettore $v_1 = (x, y, z)$ relativo all'autovalore λ_1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y - z \\ 2x - y - z \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La prima equazione è la somma della seconda e terza, e dunque si può scartare. Le rimanenti due equazioni hanno soluzione $x = y = z$, e dunque si può scegliere $v_1 = (1, 1, 1)$. Per determinare la molteplicità geometrica di λ_2, cerchiamo un vettore $v_{2,2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che $(A - \lambda_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0$ e $(A - \lambda_2 \mathbb{1})v_{2,2} \neq 0$. La prima condizione si esplicita come

$$(A - \lambda_2 \mathbb{1})^2 v_{2,2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y + z \\ -x + y + z \\ -x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e dunque $v_{2,2} = (y + z, y, z)$. Dalla seconda condizione si ha poi

$$(A - \lambda_2 \mathbb{1})v_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e dunque si può scegliere $v_{2,2} = (1, 0, 1)$. Pertanto λ_2 ha molteplicità geometrica pari a 1, e la matrice A non è diagonalizzabile, e l'unico (a meno di moltiplicazione per una costante) autovettore relativo a λ_2 è $v_{2,1} = (A - \lambda_2 \mathbb{1})v_{2,2} = (1, 1, 0)$. L'integrale generale del sistema omogeneo è allora

$$\begin{aligned} y_o(t) &= e^{tA}(c_1 v_1 + c_2 v_{2,1} + c_3 v_{2,2}) = c_1 v_1 + (c_2 + c_3 t)e^t v_{2,1} + c_3 e^t v_{2,2} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + (c_2 + c_3(1 + t))e^t \\ c_1 + (c_2 + c_3 t)e^t \\ c_1 + c_3 e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione particolare del sistema non omogeneo è data dalla formula

$$y_p(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

Da questo segue $y_p(0) = 0$ e dunque per determinare le costanti c_1, c_2, c_3 dalle condizioni iniziali non è necessario calcolare y_p. Si ha dunque

$$y_o(0) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene facilmente $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$. Per quanto riguarda il calcolo di y_p, conviene decomporre il vettore $b(s)$ dei termini noti del sistema nella base degli autovettori generalizzati di A:

$$b(s)=\begin{bmatrix} s-e^{-2s} \\ s-e^{-2s} \\ s \end{bmatrix} = b_1(s)v_1 + b_2(s)v_{2,1} + b_3(s)v_{2,2} = \begin{bmatrix} b_1(s)+b_2(s)+b_3(s) \\ b_1(s)+b_2(s) \\ b_1(s)+b_3(s) \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene facilmente $b_1(s)=s$, $b_2(s)=-e^{-2s}$, $b_3(s)=0$. Pertanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^t ds\, e^{(t-s)A}[sv_1 - e^{-2s}v_{2,1}] = \int_0^t ds\, s\, v_1 - \int_0^t ds\, e^{-2s}e^{t-s}\, v_{2,1} \\ &= \frac{t^2}{2}v_1 + \frac{e^t}{3}(e^{-3t}-1)v_{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}(e^{-2t}-e^t) \\ \frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}(e^{-2t}-e^t) \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione del problema di Cauchy dato è dunque

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix} 3-\left(\frac{10}{3}+t\right)e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{t^2}{2} \\ 3-\left(\frac{7}{3}+t\right)e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{t^2}{2} \\ 3-e^t+\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$