ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 17/2/2020

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ y^2 & \text{se } x = 0,\ y \geq 0, \\ -y^2 & \text{se } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione f è chiaramente continua, derivabile e differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ per i teoremi generali. Studiamo la continutià nei punti dell'asse y, cioè della forma $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} y^3 \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2y^3} = y_0^3,$$

ed osservando che $f(0,y) = y|y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha anche

$$\lim_{y\to y_0} f(0,y) = y_0|y_0|$$

e dunque f è continua nei punti $(0, y_0)$ se e solo se $y_0^3 = y_0|y_0|$, che equivale a $y_0 = 0, \pm 1$. Dunque f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0), (0,-1), (0,1)\}$.

Per studiare la derivabilità di f nei punti dell'asse y calcoliamo i limiti dei rapporti incrementali. Se $y \geq 0$ si ha, usando lo sviluppo $\sin t = t + o(t^2)$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h^2y^3)}{h^2} - y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^2y^3) - h^2y^2}{h^3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{y^2 - y^3}{h} + o(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0, 1, \\ \nexists & \text{se } y \neq 0, 1, \end{cases} \end{aligned}$$

mentre se $y < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h^2y^3)}{h^2} + y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^2y^3) + h^2y^2}{h^3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{y^2 + y^3}{h} + o(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = -1, \\ \nexists & \text{se } y \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque

$$f_x(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0, 1, -1, \\ \nexists & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto riguarda invece la derivata rispetto a y nei punti dell'asse y, basta considerare la restrizione di f all'asse y stesso, cioè la funzione $g(y) := f(0,y) = y|y|$, la cui derivata è $g'(y) = 2|y|$ per $y \neq 0$, e poiché $\lim_{y\to 0} 2|y| = 0$ si conclude che $f_y(0,y) = g'(y) = 2|y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la differenziabilità nei punti $(0,0), (0, \pm 1)$, non potendosi usare il teorema del differenziale totale (la funzione non è derivabile in un intorno di questi punti), è necessario ricorrere alla definizione. Si ha allora, in base a quanto visto sopra,

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h^2k^3)}{h^2\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

poiché in coordinate polari $|\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^2}}| = r|\sin^3\theta| \leq r \to 0$. D'altra parte, ricordando che $f(0,y) = y|y|$, si ha

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=0}} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{k\to 0}\frac{k|k|}{|k|} = 0,$$

e dunque f è differenziabile in $(0,0)$. Per quanto riguarda la differenziabilità in $(0,1)$ calcoliamo

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{f(h,1+k)-f(0,1)-f_x(0,1)h-f_y(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\sin(h^2(1+k)^3)}{h^2}-1-2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{(1+k)^3+o(h^2(1+k)^6)-1-2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{k+o(k)+o(h^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + o(1) = \nexists,$$

dove nel secondo passaggio si è usato di nuovo lo sviluppo $\sin t = t + o(t^2)$, nel terzo il fatto che $(1+k)^3 = 1+3k+o(k)$ e che $o(h^2(1+k)^6) = o(h^2)$, e nel quarto il fatto che $o(k) = o(h^2) = o(\sqrt{h^2+k^2})$. Dunque f non è differenzaibile in $(0,1)$. Analogamente si vede che non è differenziabile nemmeno in $(0,-1)$.

2. Dire per quali $\alpha \geq 0$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^\alpha}{(x^2+y^2)^{7/4}}$$

è sommabile sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, e calcolare, se finito, l'integrale (improprio) $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ per $\alpha = 1$.

Soluzione. La funzione f è definita, continua e non negativa in $E \setminus \{(0,0)\}$, e dunque per studiarne la sommabilità basta considerare la successione di insiemi

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq \frac{1}{n^2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\},$$

(che sono misurabili, in quanto intersezione di E, che è normale rispetto a x, e dell'esterno della palla aperta di raggio $1/n$ centrata nell'origine) e calcolare $\lim_{n\to+\infty}\iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy$. In coordinate polari E_n si trasforma nell'insieme

$$D_n = \left\{(r,\theta) : r^2 \geq \frac{1}{n^2}, 0 \leq r\cos\theta \leq 1, 0 \leq r\sin\theta \leq r\cos\theta\right\}$$

che, tenendo conto che se $\theta \in [0,2\pi]$ le disuguaglianze $\cos\theta \geq 0$ e $0 \leq \sin\theta \leq \cos\theta$ equivalgono a $\theta \in [0,\pi/4]$, si può riscrivere come

$$D_n = \left\{(r,\theta) : \frac{1}{n} \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

che è normale rispetto a θ. Allora se $\alpha \neq 1/2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/n}^{1/\cos\theta} dr\, r \frac{r^{\alpha+1}\cos\theta\sin^\alpha\theta}{r^{7/2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sin^\alpha\theta \int_{1/n}^{1/\cos\theta} dr\, r^{\alpha-3/2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1/2} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sin^\alpha\theta [r^{\alpha-1/2}]_{1/n}^{1/\cos\theta} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1/2} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sin^\alpha\theta \left(\frac{1}{\cos^{\alpha-1/2}\theta} - n^{1/2-\alpha}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1/2} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos^{3/2-\alpha}\theta\sin^\alpha\theta & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}, \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2}, \end{cases}
\end{aligned}$$

mentre se $\alpha = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sqrt{\sin\theta} \int_{1/n}^{1/\cos\theta} \frac{dr}{r} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sqrt{\sin\theta}[\log r]_{1/n}^{1/\cos\theta} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} d\theta\, \cos\theta\sqrt{\sin\theta}(\log n - \log\cos\theta) = +\infty.
\end{aligned}$$

Dunque f è sommabile in E se e solo se $\alpha > 1/2$. Per quanto visto si ha poi, se $\alpha = 1$,

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = 2\int_0^{\pi/4} d\theta\, \sqrt{\cos\theta}\sin\theta = (u = \cos\theta) = 2\int_{1/\sqrt{2}}^1 \sqrt{u}\,du = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{3/4}}\right).$$

3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (-y^3e^z + y^2e^{xy^2}, x^3\cos z + 2xye^{xy^2}, xyz),$$

si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \langle F, ds\rangle$, dove γ è una parametrizzazione dell'insieme

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 1 - x^2 - y^2,\, z = 0\},$$

orientata in modo che la sua proiezione sul piano xy sia percorsa in senso antiorario.
Soluzione. L'insieme Γ si può riscrivere

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1,\, z = 0\},$$

ed è dunque il bordo del disco

$$\Sigma = \{(x,y,z) \,:\, z = 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

la cui orientazione definita dal versore normale $n = (0,0,1)$ induce su Γ l'orientazione fissata nel testo. Dunque per il teorema di Stokes

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, F, n\rangle dS = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (\mathrm{rot}\, F)_z(x,y,0)\,dxdy.$$

Essendo allora

$$(\mathrm{rot}\, F)_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3\cos z + 2xye^{xy^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3e^z + y^2e^{xy^2}) = 3x^2\cos z + 3y^2e^z,$$

si ottiene, passando in coordinate polari,

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 3(x^2+y^2)\,dxdy = 6\pi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \exp\left(-\frac{n^2 x}{n+x^2}\right).$$

Soluzione. In base al criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \exp\left(-\frac{n^2 x}{n+x^2}\right)\right|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}\log(n^2+1)} \exp\left(-\frac{nx}{n+x^2}\right) = e^{-x}$$

e dunque la serie data è assolutamente, e quindi semplicemente, convergente se $e^{-x} < 1$, cioè se $x > 0$, e non è convergente, né assolutamente né semplicemente, se $e^{-x} > 1$, cioè se $x < 0$. Per $x = 0$ si ottiene la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, che è semplicemente convergente per il criterio di Leibniz, in quanto chiaramente $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tale serie non è però assolutamente convergente in base al criterio del confronto asintotico, in quanto

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$$

asintoticamente per $n \to +\infty$.

5. Data l'equazione differenziale

$$y''' + y'' - 2y = e^{-t}\cos t,$$

(a) determinarne l'integrale generale;
(b) determinare, se esiste, $a \in \mathbb{R}$, tale che la soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ sia limitata per $t \geq 0$.

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2$ ha chiaramente la radice $\lambda_1 = 1$, e si fattorizza quindi come $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 + i)(\lambda + 1 - i)$, cioè le altre due radici sono $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(t) = Ae^t + Be^{-t}\cos t + Ce^{-t}\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre il termine noto dell'equazione si puó scrivere, in base alle formule di Eulero,

$$e^{-t}\cos t = \frac{1}{2}[e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t}],$$

Tenendo conto che $p(-1 \pm i) = 0$, in base al metodo di similarità una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $e^{(-1\pm i)t}$ avrà la forma $y_{p,\pm}(t) = C_\pm t e^{(-1\pm i)t}$ con $C_\pm \in \mathbb{R}$ costante da determinarsi. Essendo allora

$$\begin{aligned}
y'_{p,\pm}(t) &= C_\pm[1 + (-1 \pm i)t]e^{(-1\pm i)t},\\
y''_{p,\pm}(t) &= 2C_\pm(-1 \pm i \mp it)e^{(-1\pm i)t},\\
y'''_{p,\pm}(t) &= 2C_\pm[\mp 3i + (1 \pm i)t]e^{(-1\pm i)t},
\end{aligned}$$

imponendo che $y_{p,\pm}$ sia soluzione dell'equazione si ottiene

$$y'''_{p,\pm} + y''_{p,\pm} - 2y_{p,\pm} = C_\pm(\mp 4i - 2)e^{(-1\pm i)t} = e^{(-1\pm i)t},$$

da cui

$$C_\pm = \frac{1}{\mp 4i - 2} = -\frac{1}{10} \pm \frac{i}{5},$$

e dunque la soluzione particolare dell'equazione data nel testo è

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \frac{1}{2}[y_{p,+}(t) + y_{p,-}(t)] = \frac{1}{2}[y_{p,+}(t) + \overline{y_{p,+}(t)}] = \operatorname{Re}\left[\left(-\frac{1}{10} + \frac{i}{5}\right) te^{-t}(\cos t + i\sin t)\right]\\
&= -\frac{te^{-t}}{5}\left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t\right).
\end{aligned}$$

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = Ae^t + Be^{-t}\cos t + Ce^{-t}\sin t - \frac{te^{-t}}{5}\left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Affinché la soluzione determinata sopra sia limitata per $t \geq 0$ è necessario e sufficiente che $A = 0$, e dunque

$$y(t) = e^{-t}\left[B\cos t + C\sin t - \frac{t}{5}\left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t\right)\right].$$

Imponendo allora la prima condizione iniziale $y(0) = a$ si ottiene $B = a$. Inoltre

$$y'(t) = e^{-t}\left[\left(C - a - \frac{1}{10}\right)\cos t - \left(a + C + \frac{1}{5}\right)\sin t + \frac{t}{5}\left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t\right)\right],$$

e dalla seconda condizione iniziale $0 = y'(0) = C - a - \frac{1}{10}$ si trova $C = a + \frac{1}{10}$ e dunque

$$y'(t) = e^{-t}\left[-\left(2a + \frac{3}{10}\right)\sin t + \frac{t}{5}\left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t\right)\right],$$

da cui

$$y''(t) = e^{-t}\left[\left(2a + \frac{3}{5}\right)\sin t - \left(2a + \frac{2}{5}\right)\cos t + \frac{t}{5}(2\cos t - \sin t)\right]$$

ed imponendo allora l'ultima condizione iniziale $0 = y''(0) = -\left(2a + \frac{2}{5}\right)$ si trova $a = -1/5$.