ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2019-20
PROVA SCRITTA DEL 28/1/2020

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione
$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^3},$$
se ne determinino:
(a) gli eventuali punti stazionari in $\mathbb{R}^3$, e la loro natura;
(b) il massimo e il minimo assoluti in $\mathbb{R}^3$, se esistono;
(c) il massimo e il minimo assoluti nell'insieme $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2(x^2+y^2)+z^2 \leq 1\}$, se esistono.

Soluzione. (a) La funzione f è composizione di un'esponenziale e di un polinomio, ed è dunque di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pertanto gli eventuali massimi e minimi relativi di f vanno cercati tra i punti stazionari. Questi ultimi si ottengono risolvendo il sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2xe^{x^2+y^2+z^3} = 0, \\ f_y(x,y,z) = 2ye^{x^2+y^2+z^3} = 0, \\ f_z(x,y,z) = 3z^2e^{x^2+y^2+z^3} = 0, \end{cases}$$
che ha chiaramente $(0,0,0)$ come unica soluzione. Inoltre l'hessiana di f è
$$D^2f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^3}\begin{bmatrix} 2+4x^2 & 4xy & 6xz^2 \\ 4xy & 2+4y^2 & 6yz^2 \\ 6xz^2 & 6yz^2 & 6z+9z^4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^2f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
e pertanto l'hessiana $D^2f(0,0,0)$ è semidefinita positiva, il che non permette di concludere nulla circa la natura del punto stazionario $(0,0,0)$. Tuttavia si ha $f(0,0,0) = 1$ e chiaramente $f(0,0,z) > 1$ per $z > 0$ e $f(0,0,z) < 1$ per $z < 0$, cioè $f(x,y,z) - f(0,0,0)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0,0)$, che pertanto è un punto di sella.

(b) Gli eventuali massimi e minimi assoluti di f dovrebbero anche essere suoi massimi e minimi relativi. E dunque poiché, come visto al punto (a), l'unico punto stazionario di f è un punto di sella, f non possiede massimi e minimi assoluti.

(c) L'insieme D è l'interno dell'ellissoide di centro l'origine e semiassi di lunghezze $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1 lungo gli assi x, y e z rispettivamente. Dunque D è compatto e pertanto, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti su D, che devono necessariamente trovarsi sulla sua frontiera $\partial D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2(x^2+y^2)+z^2 = 1\}$, poiché, come visto, f non ha massimi e minimi relativi in $\mathbb{R}^3$, e dunque nemmeno nell'interno di D. In base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, posto $g(x,y,z) = 2(x^2+y^2)+z^2-1$, i punti di massimo e minimo assoluti di f sono allora da ricercare tra le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) = 2x(e^{x^2+y^2+z^3} - 2\lambda) = 0, \\ f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) = 2y(e^{x^2+y^2+z^3} - 2\lambda) = 0, \\ f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) = z(3ze^{x^2+y^2+z^3} - 2\lambda) = 0, \\ g(x,y,z) = 2(x^2+y^2)+z^2-1 = 0. \end{cases}$$
Dalla prima e dalla seconda equazione si vede che se $e^{x^2+y^2+z^3} - 2\lambda \neq 0$, allora $x = y = 0$ e pertanto dalla quarta equazione $z = \pm 1$ (e $\lambda = \pm\frac{3}{2}e^{\pm 1}$ dalla terza equazione). Si hanno dunque i due punti stazionari $(0,0,\pm 1)$, tali che $f(0,0,\pm 1) = e^{\pm 1}$. Se invece $e^{x^2+y^2+z^3} - 2\lambda = 0$ le prime due equazioni sono verificate, e la terza diventa $2\lambda z(3z+1) = 0$, che ha le soluzioni $z = 0$ e $z = -\frac{1}{3}$. Sostituendo $z = 0$ nell'ultima equazione si trovano allora i punti stazionari $\{(x,y,0) \,:\, x^2+y^2 = \frac{1}{2}\}$, in corrispondenza dei quali $f(x,y,0) = e^{1/2}$. In corrispondenza di $z = -\frac{1}{3}$ si hanno

invece i punti stazionari $\{(x, y, -\frac{1}{3}) : x^2 + y^2 = \frac{4}{9}\}$, per i quali $f(x, y, -\frac{1}{3}) = e^{11/27}$. In base ai valori di f trovati si conclude allora che $\max_D f = e$, $\min_D f = \frac{1}{e}$.

2. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_E \frac{y|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdydz,$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 \ge 1,\ y \ge 0\}$.

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che la funzione integranda è chiaramente continua su $E \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e che su E si ha

$$0 \le \frac{y|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2 + y^2}|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = |z| \to 0$$

per $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$, e dunque la funzione integranda è continua (e quindi limitata) su E. Inoltre $E = E_1 \setminus E_2$ dove

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ y \ge 0\}, \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 \le 1,\ y \ge 0\} \end{aligned}$$

sono una semi-palla centrata nell'origine di raggio 1 e un semi-ellissoide centrato nell'origine di semiassi $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1 nelle direzioni x, y e z. In particolare E_1 ed E_2 sono chiaramente insiemi misurabili (si vede facilmente che sono normali rispetto al piano xy ad esempio) e dunque anche E lo è. Pertanto la funzione data è integrabile su E. In coordinate cilindriche $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, l'insieme di integrazione si trasforma in

$$D = \{(r, \theta, z) : r^2 + z^2 \le 1,\ 3r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta + z^2 \ge 1,\ r\sin\theta \ge 0\},$$

ed essendo

$$\begin{aligned} r^2 + z^2 \le 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r^2 \le 1 - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le \sqrt{1 - z^2},\ -1 \le z \le 1, \\ 3r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta + z^2 = r^2(2 + \cos^2\theta) + z^2 \ge 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r^2 \ge \frac{1 - z^2}{2 + \cos^2\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad r \ge \sqrt{\frac{1 - z^2}{2 + \cos^2\theta}},\ -1 \le z \le 1, \\ r\sin\theta \ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \le \theta \le \pi, \end{aligned}$$

si ottiene

$$D = \left\{(r, \theta, z) : 0 \le \theta \le \pi,\ -1 \le z \le 1,\ \sqrt{\frac{1 - z^2}{2 + \cos^2\theta}} \le r \le \sqrt{1 - z^2}\right\}.$$

Pertanto l'integrale proposto è pari a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \int_{-1}^1 dz \int_{\sqrt{\frac{1-z^2}{2+\cos^2\theta}}}^{\sqrt{1-z^2}} dr\, r\frac{r\sin\theta|z|}{r} &= \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_{-1}^1 dz\, |z| \int_{\sqrt{\frac{1-z^2}{2+\cos^2\theta}}}^{\sqrt{1-z^2}} dr\, r \\ &= \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_{-1}^1 dz\, |z| \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{\frac{1-z^2}{2+\cos^2\theta}}}^{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \left(1 - \frac{1}{2 + \cos^2\theta}\right) \int_{-1}^1 dz\, |z|(1 - z^2) \\ &= \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \left(1 - \frac{1}{2 + \cos^2\theta}\right) \int_0^1 dz\, z(1 - z^2) \\ &= \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \left(1 - \frac{1}{2 + \cos^2\theta}\right) \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \left(1 - \frac{1}{2 + \cos^2\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta - \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta\, \frac{\sin\theta}{2 + \cos^2\theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}[-\cos\theta]_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin\theta}{2+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin\theta}{2+\cos^2\theta},$$

e con il cambiamento di variabile $u = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin\theta}{2+\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin\theta}{1+(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan u]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che arctan è dispari. In definitiva l'integrale richiesto è

$$\iiint_E \frac{y|z|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y^3+x^2y-2y}{x^2+y^2}, \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

sulla frontiera dell'insieme $Q = [-1,1]\times[-1,1]$, orientata positivamente.
Soluzione. Il dominio di F è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso. Posto poi $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $(x,y)\in D$, si ha

$$P(x,y) = y - \frac{2y}{x^2+y^2},$$

e pertanto

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 - 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dunque F non è irrotazionale, e quindi nemmeno conservativo. Tuttavia si può scrivere $F = F_1 + F_2$ con

$$F_1(x,y) = (y,0), \quad F_2(x,y) = 2\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

e F_2 è irrotazionale, ma non conservativo come visto a lezione. Pertanto, essendo la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, omotopa in D a ∂Q^+, si avrà

$$\int_{\partial Q^+}\langle F_2, ds\rangle = \int_\gamma \langle F_2, ds\rangle = 4\pi.$$

D'altra parte l'integrale $\int_{\partial Q^+}\langle F_1, ds\rangle$ si può calcolare usando la definizione. I lati di ∂Q si possono parametrizzare come:

$$\gamma_1(t) = (t,-1),\quad t\in[-1,1],\qquad \gamma_2(t) = (1,t),\quad t\in[-1,1]$$
$$\gamma_3(t) = (t,1),\quad t\in[-1,1],\qquad \gamma_4(t) = (-1,t),\quad t\in[-1,1],$$

ma l'orientazione positiva di γ_3 e γ_4 è opposta a quella di ∂Q^+. Inoltre chiaramente $\int_{\gamma_2}\langle F_1, ds\rangle = 0 = \int_{\gamma_4}\langle F_1, ds\rangle$, e pertanto

$$\int_{\partial Q^+}\langle F_1, ds\rangle = \int_{\gamma_1}\langle F_1, ds\rangle - \int_{\gamma_3}\langle F_1, ds\rangle = \int_{-1}^1(-1)dt - \int_{-1}^1 1\cdot dt = -4.$$

In definitiva

$$\int_{\partial Q^+}\langle F, ds\rangle = \int_{\partial Q^+}\langle F_1, ds\rangle + \int_{\partial Q^+}\langle F_2, ds\rangle = 4(\pi-1).$$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2z^2, xyz, \log(x^2+y^2))$ attraverso la superficie Σ ottenuta dalla rotazione della curva di equazione $x = e^z$, $z \in [-1,1]$, di un angolo π attorno all'asse z, orientata in modo che la normale positiva nel punto $(0,1,0)$ sia $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.
Soluzione. Sia

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le e^{2z},\ -1 \le z \le 1,\ y \ge 0\}$$

l'insieme generato dalla rotazione di un angolo π attorno all'asse z dell'insieme $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le e^z,\ -1 \le z \le 1\}$ contenuto nel piano xz tra l'asse z e il grafico della funzione $x = e^z$, $-1 \le z \le 1$. Si ha allora $\partial E = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, dove

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le e^2,\ z = 1,\ y \ge 0\},\\
\Sigma_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le e^{-2},\ z = -1,\ y \ge 0\},\\
\Sigma_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -e^z \le x \le e^z,\ -1 \le z \le 1,\ y = 0\}.
\end{aligned}$$

Orientando allora Σ_1, Σ_2 e Σ_3 rispettivamente con le normali $n_1 = (0,0,1)$, $n_2 = (0,0,-1)$ e $n_3 = (0,-1,0)$ esterne a E, dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_E \mathrm{div} F\, dxdydz = \iint_\Sigma \langle F, n\rangle dS + \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1\rangle dS + \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2\rangle dS + \iint_{\Sigma_3} \langle F, n_3\rangle dS.$$

Inoltre $\mathrm{div} F(x,y,z) = x(2z^2+z)$ è dispari in x, e l'insieme E è invariante per $x \mapsto -x$, e pertanto

$$\iiint_E \mathrm{div} F\, dxdydz = 0.$$

Ponendo poi $F = (P,Q,R)$ ed essendo $Q(x,0,z) = 0$, si avrà

$$\iint_{\Sigma_3} \langle F, n_3\rangle dS = -\iint_{\{-e^z \le x \le e^z,\ -1 \le z \le 1\}} Q(x,0,z) dxdz = 0.$$

Infine, usando coordinate polari nel piano xy,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1\rangle dS &= \iint_{\{x^2+y^2 \le e^2, y \ge 0\}} R(x,y,1) dxdy = \int_0^\pi d\theta \int_0^e dr\, r \log(r^2) = (t = r^2)\\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{e^2} dt\, \log t = \frac{\pi}{2} [t(\log t - 1)]_0^{e^2} = \frac{\pi e^2}{2},
\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2\rangle dS = -\int_0^\pi d\theta \int_0^{e^{-1}} dr\, r \log(r^2) = -\frac{\pi}{2} [t(\log t - 1)]_0^{e^{-2}} = \frac{3\pi}{2e^2}.$$

In definitiva

$$\iint_\Sigma \langle F, n\rangle dS = -\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1\rangle dS - \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2\rangle dS = -\frac{\pi}{2}\left(e^2 + \frac{3}{e^2}\right).$$

5. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = -2y_2 - 2y_3 + f(t),\\ y_2' = 2y_2,\\ y_3' = -y_3 + g(t), \end{cases}$$

(a) se ne determini l'integrale generale nel caso $f(t) = g(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;
(b) se ne determini l'integrale generale nel caso

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} + 2e^{-t/2}, \quad g(t) = e^{-t/2}, \qquad t \in \mathbb{R};$$

(c) con f e g come alla domanda precedente, se ne determinino, se esistono, tutte le soluzioni $t \mapsto y(t)$ tali che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
Soluzione. (a) La matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è triangolare superiore, e dunque i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Calcoliamo gli autovettori associati.

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1})v_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y - 2z \\ 2y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 \mathbb{1})v_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x + y + z) \\ 0 \\ -3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_3 \mathbb{1})v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y - 2z \\ 3y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque ricordando che $e^{tA}v_j = e^{\lambda_j t}v_j$, $j = 1, 2, 3$, l'integrale generale del sistema omogeneo è

$$y_0(t) = e^{tA}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) = c_1 v_1 + c_2 e^{2t} v_2 + c_3 e^{-t} v_3 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^{2t} + 2c_3 e^{-t} \\ -c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(b) Sia

$$b(t) = \left(\frac{1}{1 + t^2} + 2e^{-t/2}, 0, e^{-t/2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

il vettore dei termini noti del sistema. Determiniamo funzioni scalari $t \mapsto b_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, tali che $b(t) = b_1(t)v_1 + b_2(t)v_2 + b_3(t)v_3$ per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$b_1(t)v_1 + b_2(t)v_2 + b_3(t)v_3 = \begin{bmatrix} b_1(t) + b_2(t) + 2b_3(t) \\ -b_2(t) \\ b_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t^2} + 2e^{-t/2} \\ 0 \\ e^{-t/2} \end{bmatrix},$$

da cui $b_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $b_2(t) = 0$, $b_3(t) = e^{-t/2}$. In base al metodo di variazione delle costanti, la soluzione particolare del sistema non omogeneo è pertanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} b(s) = \int_0^t ds\, [b_1(s)e^{(t-s)A}v_1 + b_2(s)e^{(t-s)A}v_2 + b_3(s)e^{(t-s)A}v_3] \\ &= \int_0^t ds\, \frac{1}{1 + s^2} v_1 + \int_0^t ds\, e^{-s/2} e^{s-t} v_3 = \arctan t\, v_1 + 2(e^{t/2} - 1)e^{-t} v_3 \\ &= \begin{bmatrix} \arctan t + 4e^{-t}(e^{t/2} - 1) \\ 0 \\ 2e^{-t}(e^{t/2} - 1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e l'integrale generale del sistema non omogeneo è dunque

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^{2t} + 2c_3 e^{-t} + \arctan t + 4e^{-t}(e^{t/2} - 1) \\ -c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-t} + 2e^{-t}(e^{t/2} - 1) \end{bmatrix}.$$

(c) Dalla soluzione trovata al punto (b), è chiaro che affinché $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$ è necessario che $c_2 = 0$, altrimenti la seconda componente di $y(t)$ diverge. In tal caso allora, essendo $\lim_{t \to +\infty} e^{-t}(e^{t/2} - 1) = 0$, si avrà

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \begin{bmatrix} c_1 + \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e dunque le soluzioni cercate sono quelle per cui $c_2 = 0$, $c_1 = -\frac{\pi}{2}$.