ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
ESERCIZI DEL 10/1/19

G. MORSELLA

Determinare l'integrale generale dei seguenti sistemi lineari di equazioni differenziali:

$$\text{(a)} \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + t \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_3 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Soluzione. (a) Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

che ha l'unica radice $\lambda = 2$ che è pertanto un autovalore di A di molteplicità algebrica 2, ma necessariamente di molteplicità geometrica 1 (altrimenti si avrebbe $A = 2\mathbb{1}$), e pertanto A non è diagonalizzabile. Senza determinare gli autovettori generalizzati, si può in questo caso osservare che dalla forma canonica di Jordan di $A = C \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}$, si ha che

$$N = A - 2\mathbb{1} = C \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathbb{1} \right] C^{-1} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1},$$

da cui $N^2 = 0$. Pertanto, essendo

$$N = A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e poiché N e $2\mathbb{1}$ chiaramente commutano,

$$e^{tA} = e^{t(2\mathbb{1}+N)} = e^{2t\mathbb{1}} e^{tN} = e^{2t}(\mathbb{1} + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema omogeneo associato a quello considerato è dato da

$$y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1(1-t) - c_2 t \\ c_1 t + (1+t)c_2 \end{pmatrix}.$$

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo si ottiene poi dal metodo di variazione delle costanti:

$$y_0(t) = \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \int_0^t ds\, e^{-2s} \begin{pmatrix} (1-t+s)s \\ (t-s)s \end{pmatrix}.$$

Usando allora per calcolare gli integrali le formule ricorsive

$$\int_0^t ds\, e^{-\alpha s} s^n = -\frac{e^{-\alpha t}}{t} + \frac{n}{\alpha} \int_0^t ds\, e^{-\alpha s} s^{n-1},$$

ottenute integrando per parti, si ricava

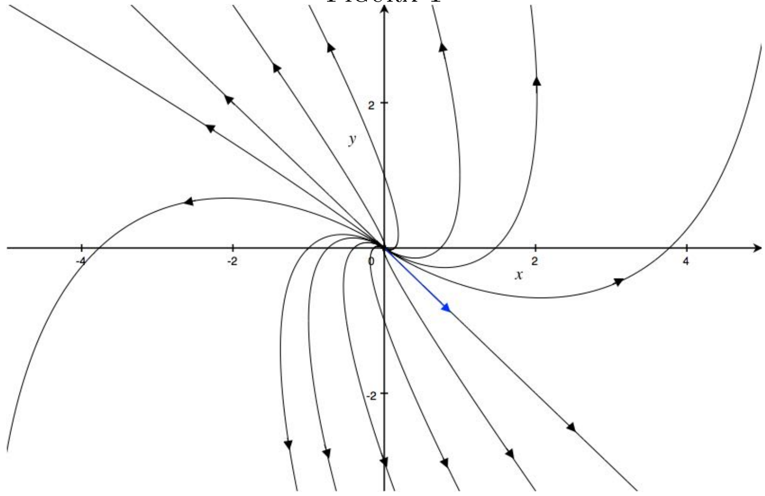
$$y_0(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2-t)e^{2t} + 3t - 8 \\ (t-1)e^{2t} - 3t + 5 \end{pmatrix}.$$

Il diagramma di fase del sistema omogeneo e l'unico (a meno di costanti) autovettore di A, $v = (1, -1, 0)$, in blu, sono mostrati in fig. 1.

(b) La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1



è triangolare superiore, con autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Anche in questo caso si può evitare il calcolo degli autovettori generalizzati osservando che posto $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, A si può scrivere come matrice a blocchi

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B}} & -2 \\ & & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ e quindi } e^{tA} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{e^{tB}}} & * \\ & & * \\ \hline 0 & 0 & e^t \end{array}\right).$$

Essendo poi $B = -\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha

$$e^{tB} = e^{-t}\left(\mathbb{1} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'ultima colonna di e^{tA} calcoliamo l'autovettore associato a $\lambda_3 = 1$, che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè $y = 2z$ e $x = 0$. Dunque l'autovettore è $v_3 = (0, 2, 1)$ e la soluzione $z_3(t) = e^{tA}v_3 = e^t v_3$ è linearmente indipendente dalle altre due colonne di e^{tA}, che sono le soluzioni $y_j(t) = e^{tA}e_j$, $j = 1, 2$. Dunque

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

è una risolvente del sistema, e pertanto

$$e^{tA} = R(t)R(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema è

$$y(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + (c_2 - 2c_3)t)e^{-t} \\ (c_2 - 2c_3)e^{-t} + 2c_3e^t \\ c_3e^t \end{pmatrix}.$$

(c) Gli autovalori della matrice dei coefficienti si determinano da

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathbb{1}) &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2 - 2 - (3-\lambda) + 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1) = 0\end{aligned}$$

e quindi gli autovalori distinti sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebriche $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Avendosi poi

$$A - 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (A-3\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

si vede che $v = (x,y,z) \in \ker(A-3\mathbb{1})^2$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(x-y) \\ 0 \\ 4(x-y) \end{pmatrix},$$

cioè $y = x$, e allora la condizione $v = (x,x,z) \notin \ker(A-3\mathbb{1})$ è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ x-z \\ x-z \end{pmatrix},$$

da cui $x \neq z$, e quindi $v_{1,2} = (0,0,1)$ è un autovettore generalizzato di A relativo a $\lambda_1 = 3$ che non è un autovettore (e dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è $m_1 = 1$), mentre $v_{1,1} := (A-3\mathbb{1})v_{1,2} = (-1,-1,-1) \in \ker(A-3\mathbb{1})$ è l'autovettore associato a λ_1. Inoltre l'unico autovettore $v_{2,1}$ associato a λ_2 si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A-\mathbb{1})v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x+2y-z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

e dunque $v_{2,1} = (1,0,1)$. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$A = C \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale è dunque

$$e^{tA} = C \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} e^t + te^{3t} & -e^t + e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & e^{3t} & -te^{3t} \\ (1-t)e^{3t} & -e^t + e^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

In definitiva, l'integrale generale del sistema considerato è

$$y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 - c_2)e^t + (c_2 + (c_1 - c_3)t)e^{3t} \\ (c_2 + (c_1 - c_3)t)e^{3t} \\ -c_2 e^t + (c_2 + (c_1 + c_3)(1-t))e^{3t} \end{pmatrix}.$$