ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
ESERCIZI DEL 20/12/18

G. MORSELLA

Osservazione importante, da ricordare: data una serie $\sum_n a_n$ a termini di segno arbitrario, se si ha $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$ si sarebbe portati a pensare, applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli, che la serie non converge assolutamente ma potrebbe convergere semplicemente. In realtà però la serie non converge *nemmeno semplicemente*, in quanto dalla dimostrazione del criterio del rapporto si vede che in questo caso $|a_n| \not\to 0$ e quindi $a_n \not\to 0$. La stessa conclusione si ottiene, con considerazioni analoghe, se $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > 1$.

1. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie seguenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(2n^2+1)\log\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+\sin n}{n^2+9}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^5}{(n+1)!}$.

Soluzione. (a) La serie è chiaramente a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \to 0 \qquad \text{per } n\to+\infty,$$

e quindi la serie è convergente.

(b) La serie è chiaramente a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1 \qquad \text{per } n\to+\infty,$$

e quindi la serie è convergente.

(c) Studiamo la convergenza assoluta. Applicando il criterio della radice alla serie dei moduli e usando $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t\to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\left[(2n^2+1)\log\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^n\right|^{1/n} &= (2n^2+1)\left|\log\left(1-\frac{1}{3n^2+2}\right)\right|\\ &= (2n^2+1)\left(\frac{1}{3n^2+2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to \frac{2}{3} < 1 \qquad \text{per } n\to+\infty.\end{aligned}$$

Dunque la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

(d) La serie è chiaramente a termini positivi. È naturale provare ad utilizzare il criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n+1}e^{\sqrt{n+1}\log(n+1)-\sqrt{n}\log n},$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}\log(n+1)-\sqrt{n}\log n &= (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\log(n+1)+\sqrt{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$. Dunque $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} = 0$ e la serie è convergente.

(e) Il modulo del termine generico ha l'andamento asintotico

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n},$$

e perciò la serie non converge assolutamente. Ma chiaramente $\frac{n}{n^2+1} \to 0$ ed è decrescente, in quanto

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{1-x^2}{(x^2-1)^2} < 0 \Leftrightarrow |x| > 1,$$

e pertanto la serie è semplicemente convergente per il criterio di Leibniz.

(f) Poiché $n + \sin n \geq n - 1 \geq 0$, si ha

$$\left|(-1)^n\frac{n+\sin n}{n^2+9}\right| = \frac{n+\sin n}{n^2+9} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{\sin n}{n}}{1+\frac{9}{n^2}} \sim \frac{1}{n},$$

e quindi la serie non è assolutamente convergente. Per studiare la convergenza semplice, conviene scrivere

$$(-1)^n\frac{n+\sin n}{n^2+9} = (-1)^n\frac{n}{n^2+9} + (-1)^n\frac{\sin n}{n^2+9}.$$

Ora il primo termine nel membro di destra è il termine generico di una serie semplicemente convergente per il criterio di Leibniz, similmente all'esercizio precedente, mentre per il secondo termine si ha

$$\left|(-1)^n\frac{\sin n}{n^2+9}\right| = \frac{|\sin n|}{n^2+9} \leq \frac{1}{n^2},$$

e dunque è il termine generico di una serie assolutamente convergente per il criterio del confronto. Così la serie data, essendo la somma di una serie convergente semplicemente e di una convergente assolutamente, è semplicemente convergente.

(g) Applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli, si ha

$$\left|(-1)^n\frac{(n+1)^5}{(n+2)!}\right| \cdot \left|\frac{(n+1)!}{(-1)^{n-1}n^5}\right| = \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \to 0,$$

e quindi la serie converge assolutamente.

2. Studiare la convergenza, semplice e assoluta, delle serie seguenti, al variare di $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n+n^x}{n^x}\right)$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+|x|^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+x}{n+x}\right)^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(4-x^2)^{\frac{n^2}{2n+5}}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-2x)^n}{n-\log n}$; (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)$, $x \geq 0$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(x^n)}{n}$.

Soluzione. (a) Applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli, si ha

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x|^n} = \frac{n}{n+1}|x| \to |x| \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

e pertanto la serie data converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge, né assolutamente né semplicemente, per $|x| > 1$ per l'osservazione fatta all'inizio. Per $x = 1$ si ottiene la serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$, che non converge, mentre per $x = -1$ si ottiene la serie a segni alterni $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ che non converge assolutamente e converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

(b) Poiché $n!$ è pari per ogni $n \geq 2$, la serie è definitivamente a termini positivi qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, quindi convergenza semplice e assoluta coincidono. Utilizzando il criterio del rapporto si ha poi, per $n \to +\infty$,

$$\frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} = x^{(n+1)!-n!} = x^{n \cdot n!} \to \begin{cases} +\infty & |x| > 1, \\ 0 & |x| < 1, \\ 1 & |x| = 1, \end{cases}$$

e dunque la serie converge per il criterio del rapporto se $|x| < 1$ e non converge (e quindi diverge) se $|x| > 1$. Se infine $|x| = 1$, il termine generico non è infinitesimo, e quindi la serie diverge.

(c) Se $x \geq 1$ il termine generico ha l'andamento asintotico, per $n \to +\infty$,

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^{x-1}}\right) \sim \frac{1}{n^{x-1}},$$

e dunque la serie converge per $x > 2$ e non converge per $x \in [1, 2)$. Se invece $x < 1$ si ha

$$\log\left(\frac{n + n^x}{n^x}\right) = (1-x)\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n^{1-x}}\right) \to +\infty,$$

e pertanto la serie è divergente. In definitiva la sere data converge per $x > 2$.

(d) Si ha, per $n \to +\infty$,

$$\frac{|x|^{n+1}}{1 + |x|^{n+1}} \cdot \frac{1 + |x|^n}{|x|^n} = |x| \frac{1 + |x|^n}{1 + |x|^{n+1}} \to \begin{cases} |x| & |x| < 1, \\ 1 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Dunque la serie converge assolutamente, per il criterio del rapporto, se $|x| < 1$. Avendosi poi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{1 + |x|^n} = 1$$

se $|x| > 1$, e $\frac{|x|^n}{1+|x|^n} = \frac{1}{2}$ se $|x| = 1$, la serie non converge assolutamente né semplicemente per $|x| \geq 1$.

(e) Essendo

$$\left|\frac{1+x}{n+x}\right| \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

la serie converge assolutamente, per il criterio della radice, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(f) Avendosi

$$\left[n^3 |4 - x^2|^{\frac{n^2}{2n+5}}\right]^{1/n} = (n^3)^{1/n} |4 - x^2|^{\frac{n}{2n+5}} \to |4 - x^2|^{1/2} \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

la serie converge assolutamente per $-1 < 4 - x^2 < 1$, cioè per $x \in (-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5})$, e non converge per $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. Infine la serie si riduce a $\sum_n n^3$, chiaramente non convergente, per $x = \pm\sqrt{3}$, e a $\sum_n n^3 (-1)^{\frac{n^2}{2n+5}}$, anch'essa non convergente (il termine generico non è infintesimo), per $x = \pm\sqrt{5}$.

(g) Applicando il criterio della radice alla serie dei moduli, bisogna calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{|1 - 2x|^n}{n - \log n}\right]^{1/n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|1 - 2x|}{e^{\frac{1}{n}\log(n - \log n)}} = |1 - 2x|,$$

che segue da $0 \leq \frac{1}{n}\log(n - \log n) \leq \frac{1}{n}\log n \to 0$. Dunque la serie converge assolutamente per $|1 - 2x| < 1$, che è equivalente a $x \in (0, 1)$, e non converge (assolutamente né semplicemente) per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Se $x = 0$ la serie data si riduce a $\sum_n \frac{1}{n - \log n}$ che ha termini positivi e non converge per confronto asintotico con $\sum_n \frac{1}{n}$, e per $x = 1$ si riduce a $\sum_n \frac{(-1)^n}{n - \log n}$, che si vede facilmente essere convergente semplicemente (ma non assolutamente) tramite il criterio di Leibniz.

(h) Osservando che il seno è una funzione dispari, si vede che la serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n^x}\right),$$

e che quindi è a segni alterni. Essendo dunque, per $n \to +\infty$,

$$\left|(-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n^x}\right)\right| = n \sin\left(\frac{1}{n^x}\right) \sim \frac{1}{n^{x-1}},$$

si vede che la serie converge assolutamente se e solo se $x > 2$, e non converge per $x \in [0, 1]$ poiché il termine generico non è infinitesimo. Dato poi $x \in (1, 2]$, si consideri la funzione $g(t) := t \sin(1/t^x)$, $t \geq 1$. Si ha

$$g'(t) = \sin\frac{1}{t^x} - \frac{x}{t^x}\cos\frac{1}{t^x} = \frac{1}{t^x}\cos\frac{1}{t^x}\Big(t^x \tan\frac{1}{t^x} - x\Big),$$

e poiché $t^x \tan(1/t^x) \to 1 < x$ per $t \to +\infty$ e $\cos(1/t^x) > 0$ per t sufficientemente grande, ne segue che g è defintivamente decrescente per $t \to +\infty$. Dunque, per il criterio di Leibniz, la serie data converge semplicemente per $x \in (1, 2]$.

(i) Essendo anche arctan una funzione dispari, e ricordando l'andamento asintotico $\arctan t \sim t$ per $t \to 0$, si ha, per $n \to +\infty$,

$$\frac{|\arctan(x^n)|}{n} = \frac{\arctan(|x|^n)}{n} \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2n} & \text{se } |x| > 1, \\ \frac{\pi}{4n} & \text{se } |x| = 1, \\ \frac{|x|^n}{n} & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Da questo, si vede che la serie non converge assolutamente se $|x| \geq 1$, e converge assolutamente se $|x| < 1$ (la serie di termine generico $|x|^n/n$ è convergente per $|x| < 1$ come visto nell'es. 2.(a)). Inoltre questo mostra anche che per $x \geq 1$ (nel qual caso $|x| = x$) la serie, essendo a termini positivi, è divergente (e quindi in particolare non converge nemmeno semplicemente). Per $x = -1$, essendo $\arctan(-1)^n = (-1)^n \arctan 1 = (-1)^n \pi/4$, la serie data si riduce a $\sum_n (-1)^n \frac{\pi}{4n}$ che è semplicemente convergente per il criterio di Leibniz. Finalmente, per $x < -1$, essendo $x = -|x|$ bisogna considerare la serie a segni alterni $\sum_n (-1)^n \frac{\arctan(|x|^n)}{n}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\arctan(|x|^t)}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{|x|^t} \cdot \frac{\log|x|}{1 + |x|^{-2t}} - \arctan(|x|^t)\right),$$

e poiché $|x| > 1$ l'espressione in parentesi converge a $-\frac{\pi}{2}$ per $t \to +\infty$, il che mostra che $\frac{\arctan(|x|^n)}{n}$ è definitivamente decrescente, e la serie data è semplicemente convergente sempre per il criterio di Leibniz.