ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 12/9/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione
$$f(x,y) = |4x^2 + y^2 - 2|,$$
(a) determinarne, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti in $\mathbb{R}^2$;
(b) determinarne, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione. (a) Osserviamo, per iniziare, che, a causa della presenza del modulo, la funzione f potrebbe non essere differenziabile dove si annulla, cioè sull'insieme
$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 4x^2 + y^2 = 2\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \right\},$$
che è l'ellisse di centro l'origine e semiassi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{2}$ lungo gli assi x e y rispettivamente. D'altra parte, sempre a causa del modulo, si ha chiaramente $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e dunque tutti i punti $(x,y) \in \Gamma$ saranno punti di minimo relativo e assoluto per f. Per determinare gli eventuali punti stazionari non appartenenti a Γ riscriviamo la funzione come
$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2, & \text{se } 4x^2 + y^2 - 2 > 0, \\ -4x^2 - y^2 + 2, & \text{se } 4x^2 + y^2 - 2 < 0. \end{cases}$$
Considerando allora dapprima il caso $4x^2 + y^2 - 2 < 0$ (interno dell'ellisse Γ), si ha
$$\begin{cases} f_x(x,y) = -8x = 0, \\ f_y(x,y) = -2y = 0, \end{cases}$$
che ha chiaramente $(0,0)$ come unica soluzione, effettivamente interna a Γ. Si deduce allora immediatamente anche che f non ha punti stazionari esterni a Γ (in quanto l'unica differenza è il segno di f). Infine l'hessiano di f all'interno di Γ è
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
che è definito negativo (-8 e -2 sono i suoi autovalori), e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo relativo per f. Infine poichè ad esempio
$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$$
si vede che f è illimitata superiormente, e quindi non ha massimi assoluti.

(b) D è un insieme compatto (è il disco unitario chiuso) e dunque per il teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluti di f in D. Per le considerazioni fatte sopra, il minimo assoluto di f in D sarà pari a zero, e sarà assunto nei punti di $\Gamma \cap D$, cioè nei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ soluzioni di
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$
Riscrivendo la prima equazione come $x^2 = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{4}$ e sostituendo nella seconda, si ottiene $y^2 \leq \frac{2}{3}$, e dunque i punti di minimo assoluto di f in D sono
$$\Gamma \cap D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{4}},\, -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

(due archi di ellisse). Il massimo di f in D invece può trovarsi all'interno di D, nel qual caso coinciderà con $(0,0)$, unico punto stazionario di f interno a D, oppure sulla frontiera $\partial D = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ di D, e sarà quindi un punto stazionario di f vincolato a ∂D. Per determinare questi ultimi punti ricorriamo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y) = x^2+y^2-1$, si ha chiaramente che $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ non si annulla su ∂D, e quindi tutti i punti di ∂D sono regolari. Inoltre i punti stazionari (x,y) di f vincolati a ∂D e interni a Γ, cioè tali che $4x^2+y^2-2<0$, sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = -8x - 2\lambda x = -2x(\lambda+4) = 0, \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = -2y - 2\lambda y = -2y(\lambda+1) = 0, \\ g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x=0$ o $\lambda=-4$. Sostituendo $x=0$ nella terza equazione si trova $y=\pm 1$, e dunque si hanno i punti stazionari vincolati $(0,\pm 1)$, che sono effettivamente interni a Γ, e per i quali $f(0,\pm 1) = 1$, Sostituendo invece $\lambda=-4$ nella seconda equazione si trova $y=0$, e sostituendo quest'ultima soluzione nella terza si trova $x=\pm 1$, ma i punti $(\pm 1, 0)$ sono esterni a Γ. Invece i punti stazionari (x,y) di f vincolati a ∂D ed esterni a Γ, cioè tali che $4x^2+y^2-2>0$, sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 8x - 2\lambda x = 2x(4-\lambda) = 0, \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2y - 2\lambda y = 2y(1-\lambda) = 0, \\ g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0, \end{cases}$$

e ragionando come sopra si trovano i punti stazionari vincolati $(\pm 1, 0)$, esterni a Γ, per i quali $f(\pm 1, 0) = 2$. Dunque essendo anche $f(0,0) = 2$, si conclude che i punti $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$ sono i punti di massimo assoluto di f in D, e $\max_D f = 2$.

2. Calcolare l'integrale

$$\iint_D dxdy\, \frac{xy\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Soluzione. Conviene osservare che sia il dominio che la funzione sono simmetrici per lo scambio di x con y, cioè rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Pertanto, indicando con

$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq x\}$$

la parte del dominio che si trova al di sotto della bisettrice, si avrà

$$\iint_D dxdy\, \frac{xy\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\iint_{D_1} dxdy\, \frac{xy\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Introducendo inoltre coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho \geq 0$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, le condizioni che definiscono il dominio diventano

$$\begin{aligned} &1 \leq x^2+y^2 = \rho, \\ &0 \leq x = \rho\cos\theta \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ &0 \leq \rho\sin\theta \leq y \leq x = \rho\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sin\theta \leq \cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

e dunque il dominio D_1 si trasforma nel dominio

$$\tilde{D}_1 := \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\, 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta}\right\},$$

che è normale rispetto a θ. Pertanto

$$
\begin{aligned}
2\iint_{D_1} dxdy\, \frac{xy\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\cos\theta}} d\rho\, \rho \frac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta\log(\rho^2)}{\rho^3} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta\cos\theta \int_1^{\frac{2}{\cos\theta}} d\rho\, \log\rho \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta\cos\theta [\rho(\log\rho - 1)]_1^{\frac{2}{\cos\theta}} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta\cos\theta \left[\frac{2}{\cos\theta}\left(\log\frac{2}{\cos\theta} - 1\right) + 1\right] \\
&= 8(\log 2 - 1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta(\cos\theta - 2\log\cos\theta).
\end{aligned}
$$

Essendo allora $\int_0^{\pi/4} d\theta\, \sin\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta(\cos\theta - 2\log\cos\theta) = (u = \cos\theta) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 du(u - 2\log u) \\
&= \left[\frac{u^2}{2} - 2u(\log u - 1)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} + \sqrt{2}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \\
&= \frac{9}{4} - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\log 2,
\end{aligned}
$$

si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
\iint_D dxdy\, \frac{xy\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} &= 8(\log 2 - 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4\left(\frac{9}{4} - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\log 2\right) \\
&= (8 - 6\sqrt{2})\log 2 + 1.
\end{aligned}
$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) := (x,y,z)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 + y^2, z \le 2x + \frac{5}{4}\right\},$$

orientata in modo che il versore normale abbia terza componente negativa. (Sugg.: può essere utile determinare la proiezione di Σ sul piano xy.)
Soluzione. La superficie Σ è la parte del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ che si trova "sotto" al piano di equazione $z = 2x + \frac{5}{4}$. La sua proiezione sul piano xy è dunque l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 2x + \frac{5}{4}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le \frac{9}{4}\right\},$$

che è il disco chiuso di centro $(1,0)$ e raggio $\frac{3}{2}$. Per poter applicare il teorema della divergenza, possiamo "chiudere" Σ con la superficie

$$\Sigma_0 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2x + \frac{5}{4}, z \ge x^2 + y^2\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2x + \frac{5}{4}, (x,y) \in E\right\}$$

cioè con la parte del piano $z = 2x + \frac{5}{4}$ al di sopra del paraboloide. In tal modo $\Sigma \cup \Sigma_0 = \partial D$, dove

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E,\, x^2 + y^2 \le z \le 2x + \frac{5}{4}\right\}$$

è un dominio regolare normale rispetto al piano xy, e pertanto, per il teorema della divergenza, essendo chiaramente $\operatorname{div} F = 3$,

$$\iint_{\Sigma^+} \langle F, n\rangle dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dxdydz - \iint_{\Sigma_0^+} \langle F, n\rangle dS = 3|D| - \iint_{\Sigma_0^+} \langle F, n\rangle dS,$$

dove Σ_0 è orientato positivamente dalla normale esterna a D. Usando allora coordinate cilindriche centrate in $(1,0)$, $x = \rho\cos\theta + 1$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, si ha che D si trasforma in

$$\tilde{D} = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le \rho \le \frac{3}{2},\, \rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1 \le z \le 2\rho\cos\theta + \frac{13}{4}\right\},$$

e dunque

$$|D| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{3}{2}} d\rho\, \rho \int_{\rho^2+2\rho\cos\theta+1}^{2\rho\cos\theta+\frac{13}{4}} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{3}{2}} d\rho\, \rho\left(\frac{9}{4} - \rho^2\right)$$
$$= \left(t = \frac{9}{4} - \rho^2\right) = \pi \int_0^{\frac{9}{4}} dt\, t = \frac{81}{32}\pi.$$

Inoltre essendo Σ_0 una superficie cartesiana, con vettore normale positivo $n = (-\partial_x z, -\partial_y z, 1) = (-2,0,1)$, ed usando coordinate polari centrate in $(0,1)$,

$$\iint_{\Sigma_0^+} \langle F, n\rangle dS = \iint_E \left(-2x + 2x + \frac{5}{4}\right) dxdy = \frac{5}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{3}{2}} d\rho\, \rho = \frac{45}{16}\pi.$$

In definitiva

$$\iint_{\Sigma^+} \langle F, n\rangle dS = 3 \cdot \frac{81}{32}\pi - \frac{45}{16}\pi = \frac{153}{32}\pi.$$

4. Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}, \frac{2x^2y + 2y^3 + 2y}{x^2+y^2}\right)$$

sulla curva $\gamma(t) := (1 + 2\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.
Soluzione. Conviene semplificare l'espressione del campo F:

$$F(x,y) = \left(1 + \frac{2x}{x^2+y^2}, 2y + \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Si ha allora chiaramente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{2x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y + \frac{2y}{x^2+y^2}\right),$$

e quindi F è un campo irrotazionale. Poiché però il suo dominio è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso, F potrebbe non essere conservativo. D'altra parte, poiché per $t \in [0,\pi]$ si ha $\sin t \ge 0$, si vede che il sostegno di γ è contenuto nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > -|x|\}$, che è semplicemente connesso, e nel quale F è dunque conservativo. Determiniamone il potenziale U:

$$U(x,y) = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+y^2}\right) dx = x + \log(x^2+y^2) + g(y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x + \log(x^2+y^2) + g(y)) = \frac{2y}{x^2+y^2} + g'(y) = 2y + \frac{2y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; g'(y) = 2y$$
$$\Rightarrow\; g(y) = \frac{y^2}{2} + c \;\Rightarrow\; U(x,y) = x + \frac{y^2}{2} + \log(x^2+y^2).$$

(Notiamo che poichè U è definito su tutto D, in realtà F è conservativo in D pur non essendo questo semplicemente connesso.) Pertanto l'integrale richiesto è

$$\int_\gamma \langle F, \gamma'\rangle = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(-1,0) - U(3,0) = -4 - \log 9.$$

5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2, \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. Determiniamo gli autovalori della matrice dei coefficienti A del sistema:

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix}3-\lambda & -2 & -1\\ 2 & -1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2 = 0,$$

che ha ovviamente le soluzioni $\lambda_1 = 0$ (semplice) e $\lambda_2 = 1$ (doppia). L'autovettore $v_1 = (x, y, z)$ relativo all'autovalore λ_1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(A-\lambda_1\mathbb{1})v_1 = \begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-2y-z\\ 2x-y-z\\ x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La prima equazione è la somma della seconda e terza, e dunque si può scartare. Le rimanenti due equazioni hanno soluzione $x = y = z$, e dunque si può scegliere $v_1 = (1, 1, 1)$. Per quanto riguarda gli autovettori relativi a λ_2, bisogna risolvere

$$(A-\lambda_2\mathbb{1})v_2 = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-2y-z\\ 2x-2y-z\\ x-y-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Scartando ancora la prima equazione si trova la soluzione $x = y$, $z = 0$, e quindi tutti gli autovettori sono proporzionali a $v_{2,1} = (1, 1, 0)$. In particolare $\lambda_2 = 1$ ha molteplicità geometrica uno, e la matrice A non è diagonalizzabile. Per porla in forma di Jordan, determiniamo l'autovettore generalizzato $v_{2,2}$ tale che $(A-\lambda_2\mathbb{1})^2 v_{2,2} = 0$ e $(A-\lambda_2\mathbb{1})v_{2,2} = v_{2,1}$. La prima condizione si esplicita come

$$(A-\lambda_2\mathbb{1})^2 v_{2,2} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+y+z\\ -x+y+z\\ -x+y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

e dunque $v_{2,2} = (y+z, y, z)$. Dalla seconda condizione si ha poi

$$(A-\lambda_2\mathbb{1})v_{2,2} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y+z\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\ z\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

e dunque si può scegliere $v_{2,2} = (1, 0, 1)$. Dunque definita la matrice

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

la forma canonica di Jordan di A e il suo esponenziale saranno

$$A = C\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}C^{-1}, \qquad e^{tA} = C\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^t & te^t\\ 0 & 0 & e^t\end{pmatrix}C^{-1},$$

e l'integrale generale del sistema sarà $y(t) = e^{tA}(c_1, c_2, c_3)$, con $c_j \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Per ottenere la soluzione del problema di Cauchy dato, si può evitare il calcolo di C^{-1} definendo $(k_1, k_2, k_3) := C^{-1}(c_1, c_2, c_3)$. In tal modo imponendo le condizioni iniziali

$$y(0) = Ce^{0\cdot A}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_2\\ k_1+k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix},$$

si trova $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, $k_3 = -1$, e pertanto la soluzione richiesta è

$$y(t) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^t & te^t\\ 0 & 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-(3+t)e^t\\ 3-(2+t)e^t\\ 3-e^t\end{pmatrix}.$$