ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 29/8/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, la continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y + y^4}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soluzione. Per i teoremi generali sulla continuità e la differenziabilità, per ogni $\alpha \geq 0$ la funzione è chiaramente di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e quindi in particolare continua, derivabile e differenziabile.

Studiamo la continuità nell'origine. Valutando la funzione sulle rette passanti per l'origine si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(mx) + m^4x^4}{(1+m^2)^\alpha x^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(mx)}{x} + m^4x^2}{(1+m^2)^\alpha x^{2\alpha-2}} = \begin{cases} 0, & 2\alpha - 2 < 0, \\ \frac{m}{1+m^2}, & 2\alpha - 2 = 0, \\ +\infty, & 2\alpha - 2 > 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che affinchè la funzione sia continua è necessario che $2\alpha - 2 < 0$, cioè $\alpha < 1$. Usando poi coordinate polari si ha

$$\left| \frac{x\sin y + y^4}{(x^2+y^2)^\alpha} \right| = \frac{|\rho\cos\theta \sin(\rho\sin\theta) + \rho^4 \sin^4\theta|}{\rho^{2\alpha}} \leq \frac{\rho|\sin(\rho\sin\theta)| + \rho^4}{\rho^{2\alpha}} \leq \frac{\rho^2+\rho^4}{\rho^{2\alpha}} = \frac{1+\rho^2}{\rho^{2\alpha-2}},$$

dove nella prima disuguaglianza si è usato il fatto che $|\cos\theta| \leq 1, |\sin\theta| \leq 1$, e nella seconda il fatto che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, che implica $|\sin(\rho\sin\theta)| \leq \rho|\sin\theta| \leq \rho$. Poiché allora la maggiorazione ottenuta è uniforme in θ e

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1+\rho^2}{\rho^{2\alpha-2}} = 0$$

per $2\alpha - 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$, si vede che la condizione $\alpha < 1$ è anche sufficiente per la continuità della funzione. Dunque la funzione data è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Per quanto riguarda le derivate parziali nell'origine, si ha, calcolando il limite dei rapporti incrementali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad \forall\, \alpha \geq 0,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^{2\alpha+1}} = \begin{cases} 0, & 2\alpha - 3 < 0, \\ 1, & 2\alpha - 3 = 0, \\ \nexists, & 2\alpha - 3 > 0, \end{cases}$$

e si conclude che la funzione data è derivabile nell'origine se e solo se $\alpha \leq \frac{3}{2}$. (In particolare, per $1 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ la funzione è derivabile ma non continua in $(0,0)$.)

Infine, per studiare la differenziabilità in $(0,0)$, in base alla definizione bisogna calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y + y^4}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Da quanto visto studiando la continuità, tale limite è nullo se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} < 1$ e dunque f è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_D dxdydz\,(z+1)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}$$

dove

$$D := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2-2y\le 0,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}.$$

Soluzione. Poiché $x^2+y^2-2y = x^2+(y-1)^2-1$, l'insieme D si può scrivere

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+(y-1)^2\le 1,\ x^2+y^2+z^2\le 4\},$$

da cui si vede che è dato dall'intersezione del cilindro con base il disco $x^2+(y-1)^2\le 1$ nel piano xy e asse parallelo all'asse z, con la sfera di raggio 2 centrata nell'origine. Per calcolare l'integrale, conviene utilizzare coordinate cilindriche, che trasformano D nell'insieme

$$\tilde{D} = \{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,r^2-2r\sin\theta\le 0,\ r^2+z^2\le 4\}.$$

Ovviamente la condizione $r^2+z^2\le 4$ è equivalente a $0\le r\le 2$ e $-\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}$. Inoltre la condizione $r^2-2r\sin\theta\le 0$ equivale a $0\le r\le 2\sin\theta$ e $0\le\theta\le\pi$ (altrimenti $\sin\theta<0$). Dunque

$$\tilde{D} = \{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le 2\sin\theta,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\},$$

e

$$\begin{aligned}
\iiint_D dxdydz\,(z+1)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} &= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}dr\,r\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}dz\,(z+1)\\
&= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}dr\,r\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\cdot\left[\frac{z^2}{2}+z\right]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}\\
&= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}dr\,r\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\cdot 2\sqrt{4-r^2}\\
&= \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}dr\,r^2 = 2\int_0^\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin\theta}d\theta\\
&= \frac{16}{3}\int_0^\pi\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = \frac{16}{3}\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi\\
&= \frac{64}{9}.
\end{aligned}$$

3. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x,y,z) := \left(e^{zy^2},e^{yx^2},e^{xz^2}\right)$$

sulla frontiera γ del quadrato di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, orientata in modo tale che i vertici siano percorsi in quest'ordine.
Soluzione. In base al teorema di Stokes, la circuitazione di F sulla curva data si può calcolare come

$$\int_\gamma\langle F,ds\rangle = \iint_{\Sigma^+}\langle\operatorname{rot}F,n\rangle dS,$$

dove Σ è una qualunque superficie regolare orientata tale che $\partial\Sigma^+=\gamma$ con orientazione concorde. Chiaramente conviene scegliere Σ come il quadrato $\Sigma=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\,:\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ orientato in modo che il versore normale positivo sia $n=(0,0,1)$. Si ha allora

$$\langle\operatorname{rot}F,n\rangle = (\operatorname{rot}F)_z = \frac{\partial}{\partial x}e^{yx^2}-\frac{\partial}{\partial y}e^{zy^2} = 2xye^{x^2y}-2zye^{zy^2}$$

e dunque, tenendo conto che su Σ si ha $z=0$,

$$\iint_{\Sigma^+}\langle\operatorname{rot}F,n\rangle dS = \int_0^1 dy\int_0^1 dx\,2xye^{x^2y} = \int_0^1 dy\,\left[e^{x^2y}\right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 dy\,(e^y-1) = e-2.$$

4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie seguente, al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(x^2-3)^n \ .$$

Soluzione. Per studiare la convergenza assoluta, si può ad esempio applicare il criterio del rapporto alla serie dei moduli. Osservando che $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \geq 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{nto+\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1})|x^2-3|^{n+1}}{\frac{1}{2^n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})|x^2-3|^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \frac{|x^2-3|}{2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n^{2/3}} + o(\frac{1}{n^{2/3}})}{\frac{1}{3n^{2/3}} + o(\frac{1}{n^{2/3}})} \frac{|x^2-3|}{2} = \frac{|x^2-3|}{2},\end{aligned}$$

avendo usato lo sviluppo $\sqrt[3]{n+2} = n^{1/3}(1+\frac{2}{n})^{1/3} = n^{1/3}(1+\frac{2}{3n}+o(\frac{1}{n})) = n^{1/3} + \frac{2}{3n^{2/3}} + o(\frac{1}{n^{2/3}})$, e l'analogo per $\sqrt[3]{n+1}$. Dunque in base al criterio del rapporto la serie converge assolutamente se

$$\frac{|x^2-3|}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x^2 - 3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5}),$$

e non converge, né assolutamente né semplicemente, se $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1,1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. Per $x = \pm\sqrt{5}$ si ha $x^2 - 3 = 2$ e dunque la serie considerata diventa la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

e poiché, come visto sopra, $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \sim \frac{1}{3n^{2/3}}$, tale serie diverge per il criterio del confronto asintotico (con la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 2/3 < 1$). Infine per $x = \pm 1$, si ottiene la serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}),$$

che non è assolutamente convergente come appena visto. La convergenza semplice di tale serie si può studiare usando il criterio di Leibniz. Sappiamo già che $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \sim \frac{1}{3n^{2/3}} \to 0$ per $n \to +\infty$. Avendosi inoltre

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}((x+1)^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}) < 0$$

si deduce che la successione $\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\}$ è anche monotona decrescente, e dunque la serie considerata converge semplicemente.

5. Determinare i punti stazionari del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -y^2 + xy + x - y \end{cases}$$

e studiarne la stabilità.

Soluzione. I punti stazionari sono quelli che annullano i secondi membri del sistema, sono cioè le soluzioni di

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -y^2 + xy + x - y = 0. \end{cases}$$

Sostituendo la soluzione $x = y$ della prima equazione nella seconda si ottiene l'identità $0 = 0$, e dunque i punti stazionari sono tutti e solo quelli della forma (x, x), $x \in \mathbb{R}$ (cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante).

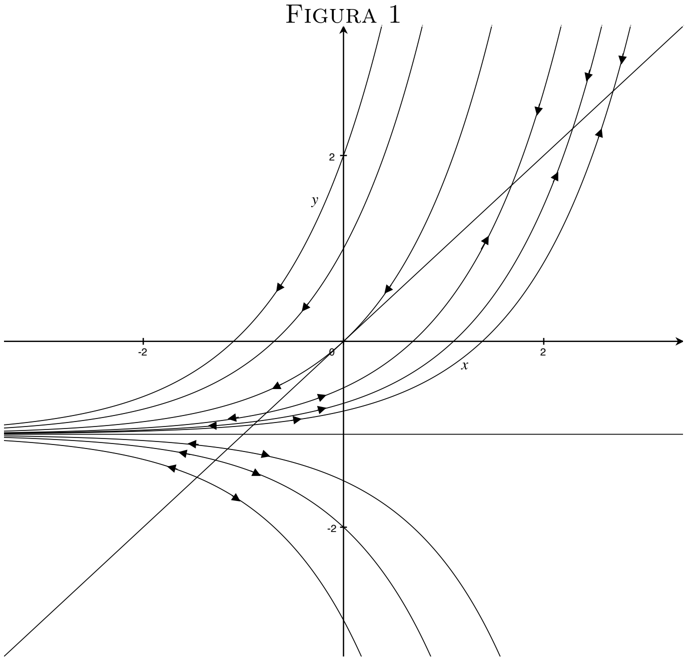
Per studiarne la stabilità, calcoliamo lo jacobiano del campo vettoriale

$$f(x,y) := (x - y, -y^2 + xy + x - y)$$

definito dai secondi membri del sistema:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y+1 & -2y + x - 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 1



Nei punti stazionari, i suoi autovalori si ottengono dall'equazione

$$\det(J_f(x,x) - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ x+1 & -x-1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-x-1-\lambda) + x + 1$$
$$= \lambda(\lambda + x) = 0,$$

e sono pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -x$. Dunque i punti stazionari (x,x) con $x < 0$ sono instabili (poiché $J_f(x,x)$ ha un autovalore positivo), mentre non abbiamo informazioni su quelli con $x \geq 0$. Per studiare questi ultimi si può ricorrere all'analisi del ritratto di fase del sistema. Dividendo le due equazioni si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-y^2 + xy + x - y}{x - y} = \frac{(x-y)(y+1)}{x-y} = y + 1,$$

equazione che può essere risolta per separazione di variabili:

$$\log|y+1| = \int \frac{dy}{y+1} = \int dx = x + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm e^{x+c} + 1 = Ce^x + 1,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Si noti che le curve di fase per $C > 0$ sono crescenti e convesse e quelle per $C < 0$ sono decrescenti e concave. Pertanto la curva di fase per $C = 1$ è tangente alla bisettrice $y = x$ nell'origine, quelle con $C > 1$ non intersecano la bisettrice, quelle con $0 < C < 1$ la intersecano esattamente in due punti, e quelle con $C \leq 0$ la intersecano in un solo punto. Inoltre dallo studio del segno del secondo membro della prima equazione del sistema si vede che le curve di fase sono percorse, al crescere di t, nel verso delle x crescenti per $x > y$, cioè a destra della bisettrice, e al contrario a sinistra di essa. In sostanza, il ritratto di fase è come mostrato in fig. 1 (dove sono mostrate le curve di fase per $C = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$), e si deduce quindi che i punti stazionari (x,x) con $x > 0$ sono stabili, e l'origine è instabile.