ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 10/7/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + 1},$$

(a) determinarne, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti in $\mathbb{R}^2$;
(b) determinarne, se esistono, i punti massimo e minimo assoluti nell'insieme $D = \{(x, y) : x \geq y^2\}$.

Soluzione. (a) Poiché la funzione data è un rapporto di polinomi il cui denominatore non si annulla mai, è definita e di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. Dunque i suoi massimi e minimi relativi vanno ricercati tra i suoi punti stazionari, che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{y^2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0, \\ f_y(x, y) = \frac{2xy}{x^2+1} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione $x = 0$ oppure $y = 0$. Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione, si ottiene l'identità $0 = 0$, e dunque tutti i punti della forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, sono stazionari. Sostituendo invece $x = 0$ nella prima equazione si ottiene $y = 0$, ma il punto $(0, 0)$ è uno di quelli già ottenuti. Per stabillire la natura dei punti stazionari così determinati, calcoliamo l'hessiano della funzione

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^2(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & \frac{2y(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\ \frac{2y(1-x^2)}{(x^2+1)^2} & \frac{2x}{x^2+1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^2 f(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{x^2+1} \end{pmatrix}.$$

Essendo allora $D^2 f(x, 0)$ diagonale, con autovalori 0 e $\frac{2x}{x^2+1}$, si vede che $D^2 f(x, 0)$ è semidefinito positivo se $x > 0$, nullo se $x = 0$ e semidefinito negativo se $x < 0$. In ogni caso non dà informazioni sulla natura del punto stazionario $(x, 0)$. Tuttavia, poiché chiaramente $f(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $f(x, y)$ ha lo stesso segno di x, si deduce che il punto stazionario $(x, 0)$ è un minimo relativo per $x > 0$, un massimo relativo per $x < 0$ e un punto di sella per $x = 0$. Inoltre chiaramente nessuno di questi punti estremali relativi è un estremale assoluto (ad esempio $(x_0, 0)$ per $x_0 > 0$ non è un minimo assoluto poiché $f(x, y) < 0$ per $x < 0$).

(b) L'insieme D non è limitato e quindi nemmeno compatto, pertanto non si può applicare il teorema di Weierstrass e la funzione potrebbe non avere massimi o minimi assoluti in D. Ma poiché chiaramente, in base a quanto visto in (a), f è non negativa su D, si vede subito che tutti i punti $(x, 0)$ con $x \geq 0$, su cui f si annulla, sono punti di minimo assoluto per f in D. Non essendoci punti di massimo relativo per f nell'interno di D per quanto visto in (a), eventuali punti di massimo assoluto di f debbono trovarsi sulla frontiera di D, $\partial D = \{(x, y) : x = y^2\}$, e dovranno quindi essere massimi relativi di f vincolati a ∂D. Per studiarne l'esistenza, consideriamo la funzione di una variabile ottenuta restringendo f a ∂D:

$$g(y) := f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + 1}.$$

Si ha ovviamente

$$g'(y) = \frac{4y^3}{(y^4 + 1)^2},$$

da cui si vede che $y = 0$ è l'unico punto stazionario di g, che è un minimo relativo. In particolare pertanto g non ha massimi relativi e f non ha massimi relativi vincolati a ∂D, e quindi in base a quanto detto sopra non ha massimi assoluti.

2. Calcolare, se esiste finito, l'integrale improprio
$$\iint_D \frac{y^3 e^{-xy^4}}{x^4}\,dxdy,$$
dove $D = \{(x,y) \,:\, x \geq 1,\, 0 \leq y \leq x^{-3/4}\}$.
Soluzione. L'insieme D è illimitato, e la funzione integranda è limitata e non negativa su D, e dunque per calcolare l'integrale improprio dato basta calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} \frac{y^3 e^{-xy^4}}{x^4}\,dxdy,$$
dove $D_n = \{(x,y) \,:\, n \geq x \geq 1,\, 0 \leq y \leq x^{-3/4}\}$, $n \in \mathbb{N}$, è limitato e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$. Si ha allora, poiché D_n è normale rispetto all'asse x,
$$\begin{aligned}\iint_{D_n} \frac{y^3 e^{-xy^4}}{x^4}\,dxdy &= \int_1^n \frac{dx}{x^4}\int_0^{x^{-3/4}} dy\, y^3 e^{-xy^4} = (t = xy^4) = \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dx}{x^5}\int_0^{x^{-2}} dt\, e^{-t} \\ &= \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dx}{x^5}(1 - e^{-\frac{1}{x^2}}) = \left(u = \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{n^2}}^1 du\, u(1-e^{-u}) \\ &= \frac{1}{8}\left\{\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{1}{n^2}}^1 - \int_{\frac{1}{n^2}}^1 du\, ue^{-u}\right\},\end{aligned}$$
e integrando per parti
$$\int du\, ue^{-u} = -ue^{-u} + \int du\, e^{-u} = -(u+1)e^{-u} + c,$$
e pertanto
$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y^3 e^{-xy^4}}{x^4}\,dxdy &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8}\left[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u}\right]_{\frac{1}{n^2}}^1 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{2n^4} - \left(\frac{1}{n^2}+1\right)e^{-\frac{1}{n^2}}\right] = \frac{1}{4e} - \frac{1}{16},\end{aligned}$$
che è positivo, come deve.

3. Calcolare in due modi diversi il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x,y,z) = (-y,x,0)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \,:\, (x^2+y^2)^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0\}$, orientata in modo che il versore normale positivo nel punto $(0,0,1) \in \Sigma$ abbia terza componente positiva.
Soluzione. Primo metodo: usiamo la definizione di flusso di un campo vettoriale
$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\, dS.$$
A tal scopo calcoliamo
$$\operatorname{rot} F = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0\end{pmatrix} = (0,0,2).$$
Inoltre la superficie Σ si può anche scrivere $\Sigma = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \leq 1,\, z = \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}\}$ da cui si vede che è una superficie cartesiana, che ha dunque vettore normale
$$n = (-\partial_x z, -\partial_y z, 1)$$
che induce l'orientazione positiva di Σ, e del quale, data la forma di $\operatorname{rot} F$, è inutile calcolare le prime due componenti. Si ottiene dunque
$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 2\,dxdy = 2\pi$$
(π è l'area del disco di raggio 1 $\{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$).
Secondo metodo: usiamo il teorema di Stokes
$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \int_{\partial\Sigma^+} \langle F, ds\rangle.$$

Chiaramente, da quanto visto sopra, $\partial\Sigma = \{(x, y, z) : z = 0,\, x^2 + y^2 = 1\}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel piano xy, una cui parametrizzazione positiva è dunque $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma^+} \langle F, ds\rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle(-\sin t, \cos t, 0), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.\end{aligned}$$

4. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$F(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + 2xy \cos(x^2 y), \frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 \cos(x^2 y)\right)$$

sul quadrato di lato 2 centrato nell'origine.
Soluzione. Il campo dato si può scrivere $F = F_1 + F_2$ dove

$$F_1(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad F_2(x, y) = \left(2xy \cos(x^2 y), x^2 \cos(x^2 y)\right).$$

Il campo F_2 è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e chiaramente

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy \cos(x^2 y)) = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos(x^2 y)),$$

dunque F_2 è irrotazionale, e quindi conservativo. Ne segue automaticamente che il suo integrale sul quadrato dato, che è una curva chiusa, è nullo. Inoltre dalla teoria è noto che F_1, che è definito sull'insieme non semplicemente connesso $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, è irrotazionale ma non conservativo, e che il suo integrale sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è pari a 2π. Essendo allora tale circonferenza omotopa al quadrato dato, se ne conclude che l'integrale richiesto è pari a 2π.

5. Determinare la soluzione $t \mapsto y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - e^{-2t} + 1 \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 + 2e^{-2t} - 1 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 1 \end{cases}$$

e calcolare, se esiste, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.
Soluzione. Cerchiamo gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ dei coefficienti del sistema: si ha

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (1 + \lambda)(3 + \lambda) + 1 = (\lambda + 2)^2$$

che ha l'unica radice $\lambda = -2$ che è pertanto un autovalore di A di molteplicità algebrica 2, ma necessariamente di molteplicità geometrica 1 (altrimenti si avrebbe $A = 2\mathbb{1}$), e pertanto A non è diagonalizzabile. Senza determinare gli autovettori generalizzati, si può in questo caso osservare che dalla forma canonica di Jordan di $A = C \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C^{-1}$, si ha che

$$N = A + 2\mathbb{1} = C \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbb{1}\right] C^{-1} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1},$$

da cui $N^2 = 0$. Pertanto, essendo

$$N = A + 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

e poiché N e $-2\mathbb{1}$ chiaramente commutano,

$$e^{tA} = e^{t(-2\mathbb{1}+N)} = e^{-2t\mathbb{1}} e^{tN} = e^{-2t}(\mathbb{1} + tN) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale del sistema omogeneo associato a quello considerato è dato da

$$y_o(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} c_1 + (c_1 + c_2)t \\ c_2 - (c_1 + c_2)t \end{pmatrix}.$$

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo si ottiene poi dal metodo di variazione delle costanti:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 1-e^{-2s} \\ 2e^{-2s}-1 \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t} \int_0^t ds\, e^{2s} \begin{pmatrix} (1+t-s)(1-e^{-2s}) + (t-s)(2e^{-2s}-1) \\ (s-t)(1-e^{-2s}) + (1+s-t)(2e^{-2s}-1) \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t} \int_0^t ds\, \begin{pmatrix} e^{2s}+t-s-1 \\ -e^{2s}-t+s+2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t}-1) + \frac{t^2}{2} - t \\ -\frac{1}{2}(e^{2t}-1) - \frac{t^2}{2} + 2t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dunque la soluzione generale del sistema dato è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} c_1 + (c_1+c_2)t + \frac{1}{2}(e^{2t}-1) + \frac{t^2}{2} - t \\ c_2 - (c_1+c_2)t - \frac{1}{2}(e^{2t}-1) - \frac{t^2}{2} + 2t \end{pmatrix},$$

e imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

si ottiene la soluzione cercata

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 2t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{t^2}{2} \\ \frac{3}{2} - t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix},$$

da cui

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$