ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 24/6/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione

$$F(x,y) = x^2 + \int_1^{y^2} e^{-yt^2} dt,$$

(a) verificare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(0,1)$;

(b) verificare che la funzione f ha un punto stazionario per $x = 0$ e studiarne la natura.

Soluzione. (a) Si ha

$$F(0,1) = 0^2 + \int_1^1 e^{-t^2} dt = 0$$

e dal teorema di derivazione sotto integrale

$$\begin{aligned}\partial_y F(x,y) &= \int_1^{y^2} dt \, \frac{\partial}{\partial y} e^{-yt^2} + e^{-yt^2}\Big|_{t=y^2} \frac{d}{dy} y^2 - e^{-yt^2}\Big|_{t=1} \frac{d}{dy} 1 \\ &= -\int_1^{y^2} t^2 e^{-yt^2} dt + 2ye^{-y^5},\end{aligned}$$

da cui $\partial_y F(0,1) = \frac{2}{e}$. Essendo pertanto verificate le ipotesi del teorema di Dini in $(0,1)$, nell'intorno di questo punto l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ tale che $f(0) = 1$.

(b) Essendo chiaramente $\partial_x F(x,y) = 2x$, sempre dal teorema di Dini si ha

$$f'(0) = -\frac{\partial_x F(0,1)}{\partial_y F(0,1)} = 0,$$

per cui $x = 0$ è un punto stazionario per f. Per determinarne la natura occorre calcolare $f''(0)$, che esiste in quanto F è chiaramente di classe C^2, e quindi anche f. A tale scopo, ricordiamo che si ha identicamente, in un intorno di $x = 0$,

$$\partial_x F(x, f(x)) + \partial_y F(x, f(x)) f'(x) = 0,$$

e derivando tale identità rispetto a x si ottiene

$$\begin{aligned}&\partial^2_{xx} F(x, f(x)) + \partial^2_{xy} F(x, f(x)) f'(x) \\ &\qquad + \big[\partial^2_{xy} F(x, f(x)) + \partial^2_{yy} F(x, f(x)) f'(x)\big] f'(x) + \partial_y F(x, f(x)) f''(x) = 0\end{aligned}$$

da cui, calcolando per $x = 0$ e ricordando che $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, si ricava $\partial^2_{xx} F(0,1) + \partial_y F(0,1) f''(0) = 0$, e pertanto essendo $\partial^2_{xx} F(x,y) = 2$,

$$f''(0) = -\frac{\partial^2_{xx} F(0,1)}{\partial_y F(0,1)} = -e < 0$$

e si conclude che $x = 0$ è un punto di massimo relativo per f.

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_D (\sin x + y^2) z \, dxdydz$$

dove

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \le z \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} \right\}.$$

Soluzione. Osserviamo che l'integrale dato si scrive come la somma

$$\iiint_D \sin xz\, dxdydz + \iiint_D y^2 z\, dxdydz,$$

e che il primo integrale è nullo per simmetria: la funzione integranda è dispari e il dominio è invariante per la trasformazione $x \mapsto -x$. Inoltre affinché esista $z \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \le z \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$ è necessario che $\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$, cioè che $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le \frac{1}{2}$. Dunque il dominio di integrazione si può riscrivere

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in E,\ \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \le z \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} \right\},$$

dove

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le \frac{1}{2} \right\},$$

da cui si vede che D è normale rispetto al piano (x,y). Pertanto

$$\begin{aligned}
\iiint_D y^2 z\, dxdydz &= \iint_E dxdy\, y^2 \int_{\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}} dz\, z = \iint_E dxdy\, y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}} \\
&= \iint_E dxdy\, y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale conviene usare coordinate ellittiche $x = 3\rho\cos\theta$, $y = 2\rho\sin\theta$, il cui determinante jacobiano è 6ρ. Essendo allora in tali coordinate $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \rho^2$, il dominio E si trasforma nel rettangolo $\tilde{E} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le \rho \le \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$, e dunque

$$\begin{aligned}
\iint_E dxdy\, y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \right) &= 24 \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\rho\, \rho^3 \left(\frac{1}{2} - \rho^2 \right) \\
&= 24 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= 24\pi \left(\frac{1}{8 \cdot 4} - \frac{1}{6 \cdot 8} \right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie ottenuta facendo ruotare una curva avente sostegno $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$ $x = 0,\ y = 1 - z^2,\ -1 \le z \le 1\}$ attorno all'asse z di un angolo 2π. Calcolare:
(a) l'area di Σ;
(b) il flusso uscente da Σ del campo vettoriale $F(x,y,z) = (2x + y^2, x^3, z - x^2)$.
Soluzione. (a) Essendo Σ una superficie di rotazione, come sua parametrizzazione si può scegliere

$$\sigma(\theta,z) = \big((1-z^2)\cos\theta, (1-z^2)\sin\theta, z \big), \qquad (\theta,z) \in [0,2\pi] \times [-1,1].$$

Si ha in tal modo

$$\begin{aligned}
(\partial_\theta\sigma \times \partial_z\sigma)(\theta,z) &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(1-z^2)\sin\theta & (1-z^2)\cos\theta & 0 \\ -2z\cos\theta & -2z\sin\theta & 1 \end{pmatrix} \\
&= \big((1-z^2)\cos\theta, (1-z^2)\sin\theta, 2z(1-z^2) \big),
\end{aligned}$$

e pertanto $\|(\partial_\theta\sigma \times \partial_z\sigma)(\theta,z)\| = (1-z^2)\sqrt{1+4z^2}$. Dunque l'area di Σ si ottiene calcolando

$$\begin{aligned}
A(\Sigma) &= \iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} d\theta dz\, \|(\partial_\theta\sigma \times \partial_z\sigma)(\theta,z)\| = 2\pi \int_{-1}^1 dz\, (1-z^2)\sqrt{1+4z^2} \\
&= 4\pi \int_0^1 dz\, (1-z^2)\sqrt{1+4z^2} = 2\pi \int_0^2 du \left(1 - \frac{u^2}{4} \right) \sqrt{1+u^2},
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che la funzione integranda è pari e il cambiamento di variabile $u = 2z$. Calcoliamo la primitiva della funzione integranda. Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int du\,\sqrt{1+u^2} &= u\sqrt{1+u^2} - \int du\,\frac{u^2+1-1}{\sqrt{1+u^2}}\\ &= u\sqrt{1+u^2} - \int du\,\sqrt{1+u^2} + \log|u+\sqrt{1+u^2}|\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^2 du\,\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2} + \log|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}).$$

Similmente,

$$\begin{aligned}\int du\,u^2\sqrt{1+u^2} &= \int du\,(u^2+1-1)\sqrt{1+u^2} = \int du\,(1+u^2)^{3/2} - \int du\,\sqrt{1+u^2}\\ &= u(1+u^2)^{3/2} - 3\int du\,u^2\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2} + \log|u+\sqrt{1+u^2}|\right],\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^2 du\,u^2\sqrt{1+u^2} &= \frac{1}{4}\left[u(1+u^2)^{3/2} - \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{2}\log|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_0^2\\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{8}\log(2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$A(\Sigma) = \frac{\pi}{8}\left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2}\log(2+\sqrt{5})\right].$$

(b) Chiaramente Σ è la frontiera dell'insieme D che si ottiene facendo ruotare la parte del piano (y,z) contenuta tra l'asse z e l'arco di parabola di equazione $y = 1 - z^2$ di un angolo 2π attorno all'asse z, cioè analiticamente

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -1 \le z \le 1,\, x^2+y^2 \le (1-z^2)^2\},$$

che è un insieme normale rispetto all'asse z. Poiché inoltre $\mathrm{div}F = 3$, dal teorema della divergenza si ottiene, integrando "per strati", il flusso

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \langle F, n\rangle d\sigma &= \iiint_D \mathrm{div}F\,dxdydz = 3\int_{-1}^1 dz\,|\{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le (1-z^2)^2\}|\\ &= 3\pi\int_{-1}^1 dz\,(1-z^2)^2 = 6\pi\int_0^1 dz\,(1+z^4-2z^2) = 6\pi\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{5}\pi.\end{aligned}$$

4. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$F(x,y) := \left(\frac{y^2-x^2-1}{(x^2+y^2-1)^2}, \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2-1)^2}\right)$$

sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $r \neq 1$.

Soluzione. La circonferenza di centro l'origine e raggio $r \neq 1$ è parametrizzata da $\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e dunque, in base alla definizione di integrale curvilineo di un campo vettoriale,

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_r} \langle F, ds\rangle\\ &= \frac{1}{(r^2-1)^2}\int_0^{2\pi} dt\,\left[(r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t - 1)\cdot(-r\sin t) + (r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t - 1)\cdot(r\cos t)\right]\\ &= \frac{r}{(r^2-1)^2}\int_0^{2\pi} dt\,\left(-r^2\sin^3 t + r^2\cos^2 t\sin t + \sin t + r^2\cos^3 t - r^2\sin^2 t\cos t - \cos t\right).\end{aligned}$$

Usando allora il cambiamento di variabili $u = \cos t$ si ottiene

$$\int dt\,\sin^3 t = -\int du(1-u^2) = -u + \frac{u^3}{3} + c = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + c$$

e

$$\int dt\, \cos^2 t \sin t = -\int du\, u^2 = -\frac{\cos^3 t}{3} + c,$$

e pertanto, per periodicità,

$$\int_0^{2\pi} dt\, \sin^3 t = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0, \qquad \int_0^{2\pi} dt\, \cos^2 t \sin t = \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

e analogamente, con il cambiamento di variabili $u = \sin t$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} dt\, \cos^3 t = 0, \qquad \int_0^{2\pi} dt\, \sin^2 t \cos t = 0,$$

e poiché chiaramente anche $\int_0^{2\pi} dt\, \sin t = \int_0^{2\pi} dt\, \cos t = 0$ si conclude che $\int_{\gamma_r} \langle F, ds\rangle = 0$.

5. Data l'equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' - y = f(t),$$

(a) determinare tutti i numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che il problema di Cauchy con $f(t) = 0$ e con condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$, $y''(0) = c$ abbia soluzione limitata in $\mathbb{R}$;

(b) determinarne l'integrale generale per $f(t) = te^t$.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, che ha chiaramente la soluzione $\lambda_1 = 1$. Dividendo poi il polinomio caratteristico per $\lambda - 1$ si trova

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

e dunque le altre due soluzioni sono $\lambda_{2,3} = \pm i$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è pertanto

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e tale funzione è limitata in $\mathbb{R}$ se e solo se $c_1 = 0$. Imponendo allora tale condizione e le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = a \\ y'(0) = c_3 = b \\ y''(0) = -c_2 = c \end{cases}$$

e dunque $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono tali che la soluzione è limitata se e solo se $c = -a$.

(b) Il termine noto è della forma $q(t)e^{\alpha t}$ con q polinomio di primo grado e $\alpha = 1 = \lambda_1$ radice del polinomio caratteristico con molteplicità algebrica 1. Dunque in base al metodo di similitudine la soluzione particolare dell'equazione non omogenea sarà della forma $y_0(t) = t(At + B)e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare. Si ha

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= [At^2 + (2A + B)t + B]e^t, \\ y_0''(t) &= [At^2 + (4A + B)t + 2A + 2B]e^t, \\ y_0'''(t) &= [At^2 + (6A + B)t + 6A + 3B]e^t \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$(4At + 4A + 2B)e^t = te^t$$

da cui $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, e pertanto l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{t}{2}\left(\frac{t}{2} - 1\right)e^t.$$