ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 15/2/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x-y)x^2}-1}{x-y} & \text{se } x \neq y, \\ x^3 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Soluzione. Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y\}$. Poiché allora per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, $f(x,y)$ è una frazione il cui numeratore è la composizione della funzione derivabile $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t - 1$ con il polinomio $(x,y) \mapsto (x-y)x^2$ e il cui denominatore è il polinomio $(x,y) \mapsto x-y$, che non si annulla su D, per i teoremi sulle operazioni con i limiti e sulle funzioni differenziabili f è continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Fissato poi $(x_0,x_0) \in D$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x\neq y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{e^{(x-y)x^2}-1}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} x^2 \frac{e^{(x-y)x^2}-1}{(x-y)x^2} = x_0^2,$$

avendo usato $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}(x-y)x^2 = 0$. D'altra parte chiaramente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3 = f(x_0,x_0),$$

e dunque f è continua in (x_0,x_0) se e solo se $x_0^2 = x_0^3$, cioè se e solo se $x_0 = 0, 1$. Dunque f è continua in $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup \{(0,0),(1,1)\}$.

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq y$ si ha chiaramente

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2-2xy)(x-y)e^{(x-y)x^2} - e^{(x-y)x^2} + 1}{(x-y)^2},$$

$$f_y(x,y) = -\frac{x^2(x-y)e^{(x-y)x^2} - e^{(x-y)x^2} + 1}{(x-y)^2}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,x)-f(x,x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{h(x+h)^2}-1}{h} - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h(x+h)^2} - 1 - x^3 h}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)^2 + \frac{1}{2}h^2(x+h)^4 - hx^3 + o(h^2(x+h)^4)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2-x^3)h + (2x+\frac{1}{2}x^4)h^2 + o(h^2)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-x^3}{h} + 2x + \frac{1}{2}x^4 + o(1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{5}{2} & \text{se } x = 1, \\ \nexists & \text{se } x \neq 0,1, \end{cases}
\end{aligned}$$

e dunque $f_x(0,0) = 0$, $f_x(1,1) = \frac{5}{2}$, mentre $\nexists f_x(x,x)$ se $x \neq 0,1$. Analogamente

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x,x+h)-f(x,x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{-hx^2}-1}{-h} - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-hx^2} - x^3 h}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2-x^3)h - \frac{1}{2}x^4h^2 + o(h^2)}{h^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 1, \\ \nexists & \text{se } x \neq 0,1, \end{cases}
\end{aligned}$$

e pertanto $f_y(0,0) = 0$, $f_y(1,1) = -\frac{1}{2}$, mentre $\nexists f_y(x,x)$ se $x \neq 0, 1$.

Infine, non essendo f continua nei punti (x,x) con $x \neq 0,1$, non sarà nemmeno differenziabile in tali punti. Per studiare la differenziabilità in $(0,0)$ e $(1,1)$ osserviamo che non si può usare il teorema del differenziale totale, poiché f_x e f_y non sono definite in un intorno di tali punti (in quanto non definite in (x,x) per $x \neq 0,1$). Allora calcoliamo, in base alla definizione,

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h\neq k}} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{e^{(h-k)h^2}-1}{h-k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \frac{e^{(h-k)h^2}-1}{(h-k)h^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=k}} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{\sqrt{2}|h|} = 0$$

e concludiamo che f è differenziabile in $(0,0)$. Per quanto riguarda la differenziabilità in $(1,1)$ si può osservare che, posto $v = (1,1)$,

$$D_v f(1,1) = \frac{d}{dt} f(1+t, 1+t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1+t)^3\Big|_{t=0} = 3 \neq 2 = \langle \nabla f(1,1), v\rangle,$$

e dunque f non è differenziabilie in $(1,1)$. In alternativa si può usare la definizione e calcolare

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=k}} \frac{f(1+h,1+k) - f(1,1) - f_x(1,1)h - f_y(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1 - 2h}{\sqrt{2}|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{h + o(h)}{\sqrt{2}|h|}$$

che chiaramente non esiste, il che conferma la non differenziabilità di f in $(1,1)$.

2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-xy}$$

è sommabile su $D = [0,+\infty) \times [1,2]$, e calcolare, se possibile, $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ per $\alpha = -1$.

Soluzione. Poiché $\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to 0^+$, la funzione f diverge sul segmento $\{0\} \times [1,2] \subset D$ se $\alpha > 1$. Sia dunque $D_n := [\frac{1}{n}, n] \times [1,2]$, $n \in \mathbb{N}$, su cui f è continua e dunque limitata. Allora f è sommabile su D se e solo se esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|\,dxdy = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx\, \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \int_1^2 dy\, e^{-xy}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx\, \frac{|\sin x|}{x^{\alpha+1}} (e^{-x} - e^{-2x})$$

cioè se e solo se la funzione $g(x) = \frac{|\sin x|}{x^{\alpha+1}}(e^{-x} - e^{-2x})$ è impropriamente integrabile in $[0,+\infty)$. Poiché allora, per $x \to 0$,

$$\frac{|\sin x|}{x^{\alpha+1}}(e^{-x} - e^{-2x}) = \frac{x + o(x)}{x^{\alpha+1}}(1 - x - (1-2x) + o(x)) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}(1 + o(1)),$$

si vede che g è integrabile in un intorno di $x = 0$ se e solo se $\alpha < 2$. Inoltre chiaramente $\lim_{x\to+\infty} x^2 g(x) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e dunque $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ definitivamente per $x \to +\infty$, che implica l'integrabilità di g all'infinito. Si conclude allora che f è sommabile in D se e solo se $\alpha < 2$.

Posto poi $\alpha = -1$, si ha

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx\, x \sin x \int_1^2 dy\, e^{-xy}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx\, \sin x (e^{-x} - e^{-2x})$$

e integrando per parti, per $a \in \mathbb{R}$,

$$\int dx\, e^{ax} \sin x = \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a} \int dx\, e^{ax} \cos x = \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x - \frac{1}{a^2} \int dx\, e^{ax} \sin x,$$

da cui

$$\int dx\, e^{ax} \sin x = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(a \sin x - \cos x).$$

Si conclude allora che

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{e^{-2x}}{5}(2\sin x + \cos x) \right]_{\frac{1}{n}}^{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$f(x,y,z) = (x + y^2 + z^3, y + z^2 + x^3, 1)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{x^2+y^2},\, x^2+y^2 \le 1\},$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa.
Soluzione. Σ è la porzione della superficie laterale del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ contenuta tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$. Indicata allora con $\Sigma_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1, z = 1\}$ la parte del piano $z = 1$ contenuta all'interno del cono, e con $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$ la porzione del cono stesso compresa tra i due piani considerati, si ha $\partial C = \Sigma \cup \Sigma_0$. Orientando allora Σ_0 con il versore normale $n_0^+ = (0,0,1)$ uscente da C, e tenendo conto che l'orientazione scelta di Σ è tale che il versore normale n^+ è entrante in C, si ha, dal teorema della divergenza,

$$\iiint_C \operatorname{div} f\, dxdydz = -\iint_\Sigma \langle f, n^+\rangle + \iint_{\Sigma_0} \langle f, n_0^+\rangle.$$

Poiché inoltre chiaramente $\operatorname{div} f = 2$ e $\langle f, n_0^+\rangle = 1$, si ottiene, usando coordinate cilindriche per calcolare l'integrale triplo su C,

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \langle f, n^+\rangle &= -2 \iiint_C dxdydz + \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} dxdy \\
&= -2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho \int_\rho^1 dz + \pi \\
&= -4\pi \int_0^1 d\rho\, \rho(1-\rho) + \pi = -4\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 + \pi = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4. Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\tan x)^n \sin \frac{x}{n}, \qquad x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Soluzione. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\tan x|^{n+1} \left|\sin \frac{x}{n+1}\right|}{|\tan x|^n \left|\sin \frac{x}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} |\tan x| \frac{\left|\sin \frac{x}{n+1}\right|}{\left|\sin \frac{x}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} |\tan x| \frac{n}{n+1} = |\tan x|$$

da cui si deduce che la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, se $|\tan x| < 1$, che equivale a $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e non converge né assolutamente né semplicemente se $|\tan x| > 1$, che equivale a $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se poi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, il termine generico della serie diventa $\sin \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ che per $n \to +\infty$ è definitivamente positivo e asintotico a $\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, che è il termine generico di una serie divergente, e quindi è divergente anche la serie data. Se infine $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ la serie data si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ che è (definitivamente) a segni alterni e convergente semplicemente per il criterio di Leibniz, in quanto si verifica facilmente che $\sin \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ tende monotonamente a zero per $n \to +\infty$. Tale serie non converge però assolutamente poiché $\left|(-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right| = \sin \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ che come appena visto è il termine generico di una serie divergente.

5. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -3y_1 - y_2 - y_3, \end{cases}$$

con $y = (y_1, y_2, y_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
(a) determinarne l'integrale generale;
(b) determinarne, se esiste, una soluzione $t \mapsto y(t)$ tale che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
Soluzione. (a) Determiniamo gli autovalori della matrice A dei coefficienti:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1+\lambda)(2+\lambda) - 6 - 6 - 6(2+\lambda) + 2\lambda - 3(1+\lambda) \\ &- (\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 27).\end{aligned}$$

Si vede allora che $\lambda_1 = -3$ è un autovalore di A, e dividendo poi $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ per $\lambda + 3$ si ottiene $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = -(\lambda+3)(\lambda^2+9)$, per cui gli altri due autovalori di A sono $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = -3i$. Poiché allora A ha tre autovalori distinti, è diagonalizzabile. Calcoliamone poi gli autovettori. L'autovettore v_1 associato a λ_1 è soluzione non banale del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2z \\ 3x + y - 2z \\ -3x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Sommando le prime due equazioni si ottiene $x = 0$, e sostituendo nella seconda equazione $y = 2z$, dunque si può prendere $v_1 = (0, 2, 1)$. L'autovettore v_2 associato a λ_2 è determinato da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3i & -1 & 2 \\ 3 & -2-3i & -2 \\ -3 & -1 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ix - y + 2z \\ 3x - (2+3i)y - 2z \\ -3x - y - (1+3i)z \end{pmatrix}.$$

Sommando la seconda e la terza equazione si ottiene $(3 + 3i)y + (3 + 3i)z = 0$, cioè $y = -z$, e sostituendo nella prima equazione $x = -iz$, e dunque si può prendere $v_2 = (i, 1, -1)$. Infine poiché A è reale e $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, si può prendere $v_3 = \bar{v}_2 = (-i, 1, -1)$. Allora l'integrale generale del sistema considerato sarà

$$y(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + \alpha e^{3it} v_2 + \beta e^{-3it} v_3,$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ma dovendo essere $y(t) \in \mathbb{R}^3$, si avrà $y(t) = \overline{y(t)} = c_1 e^{-3t} v_1 + \bar{\alpha} e^{-3it} \bar{v}_2 + \bar{\beta} e^{3it} \bar{v}_3 = c_1 e^{-3t} v_1 + \bar{\alpha} e^{-3it} v_3 + \bar{\beta} e^{3it} v_2$ e dunque, essendo v_1, v_2, v_3 una base di $\mathbb{C}^3$ e $e^{\pm 3it} \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ottiene $\beta = \bar{\alpha}$, e dunque

$$y(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + \alpha e^{3it} v_2 + \bar{\alpha} e^{-3it} v_3 = c_1 e^{-3t} v_1 + 2\mathrm{Re}\,[\alpha e^{3it} v_2].$$

Posto allora $\alpha = \frac{c_2 + ic_3}{2}$, $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, e usando le formule di Eulero, si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Re} \left[(c_2 + ic_3)(\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -c_2 \sin 3t - c_3 \cos 3t \\ 2c_1 e^{-3t} + c_2 \cos 3t - c_3 \sin 3t \\ c_1 e^{-3t} - c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) È chiaro dalle formule di sopra che se $\alpha = 0$ si ottiene la soluzione

$$y(t) = c_1 e^{-3t} v_1 = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tale che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.