ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2018-19
PROVA SCRITTA DEL 28/1/19

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}z + 2,$$

(a) se ne determinino i punti stazionari in $\mathbb{R}^3$ e la loro natura;

(b) se ne determinino, se esistono, il massimo e il minimo assoluti nell'insieme $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Soluzione. (a) I punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2x + \sqrt{2} = 0, \\ f_y(x,y,z) = -2y = 0, \\ f_z(x,y,z) = -2z - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Dunque l'unico punto stazionario è $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Per studiarne la natura, calcoliamo l'hessiano di f, che è chiaramente

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è indipendente da (x,y,z) ed è ovviamente indefinito (poiché ha autovalori 2 e -2), dunque $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ è un punto di sella.

(b) D è la palla chiusa di centro l'origine e raggio 1, ed è quindi compatto. Pertanto per il teorema di Weierstarss esistono $\min_D f$ e $\max_D f$ che devono trovarsi su $\partial D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ in quanto, come visto sopra, f non ha massimi né minimi relativi in $\mathring{D}$. Dunque $\min_D f$ e $\max_D f$ vanno cercati tra i punti stazionari di f vincolati a ∂D. Questi ultimi, in base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2} - 2\lambda x = 2x(1-\lambda) + \sqrt{2} = 0, \\ -2y - 2\lambda y = -2y(1+\lambda) = 0, \\ -2z - \sqrt{2} - 2\lambda z = -2z(1+\lambda) - \sqrt{2} = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

La seconda equazione ha le soluzioni $y = 0$ o $\lambda = -1$. Sostituendo quest'ultima nella terza equazione si ottiene l'equazione impossibile $\sqrt{2} = 0$, dunque $\lambda \neq -1$. Analogamente si vede dalla prima equazione che $\lambda \neq 1$. Dunque il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}(1-\lambda)}, \\ y = 0, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda)}, \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Sostituendo la prima e la terza equazione nella quarta si ha

$$\frac{1}{2(1-\lambda)^2} + \frac{1}{2(1+\lambda)^2} = 1 \iff (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = 2(1-\lambda^2)^2$$
$$\iff 2\lambda^4 - 6\lambda^2 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda = 0, \pm\sqrt{3}$. I corrispondenti punti stazionari di f vincolati a ∂D sono pertanto

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}), 0, \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right), \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6}), 0, \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right),$$

avendo usato il fatto che $\frac{1}{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}\mp\sqrt{6}}{4}$. Il primo punto è il punto di sella determinato sopra, quindi non può essere né un massimo né un minimo. Per quanto riguarda gli altri due si ha

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{4}\ (\sqrt{2}+\sqrt{6}), 0, \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right) \\
&\qquad = \frac{1}{16}(8+2\sqrt{12}) - \frac{1}{16}(8-2\sqrt{12}) + \frac{1}{4}(2+\sqrt{12}) - \frac{1}{4}(2-\sqrt{12}) + 2 = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \\
&f\left(\frac{1}{4}\ (\sqrt{2}-\sqrt{6}), 0, \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right) \\
&\qquad = \frac{1}{16}(8-2\sqrt{12}) - \frac{1}{16}(8+2\sqrt{12}) + \frac{1}{4}(2-\sqrt{12}) - \frac{1}{4}(2+\sqrt{12}) + 2 = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3},
\end{aligned}$$

e pertanto $\min_D f = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $\max_D f = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_D \frac{x+y}{\sqrt{2}} dxdydz,$$

dove $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 \le 1, y \ge 0\}$.

Soluzione. Essendo D invariante per $x \mapsto -x$, la parte dispari in x dell'integrando dà contributo nullo:

$$\iiint_D \frac{x+y}{\sqrt{2}} dxdydz = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_D y\, dxdydz$$

In coordinate cilindriche, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, il dominio di integrazione D si trasforma in

$$\begin{aligned}
E &= \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{r^2}{4} + z^2 \le 1, r\sin\theta \ge 0\right\} \\
&= \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le \theta \le \pi,\, 0 \le r \le 2,\, -\sqrt{1-\frac{r^2}{4}} \le z \le \sqrt{1-\frac{r^2}{4}}\right\},
\end{aligned}$$

e dunque l'integrale considerato diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^2 dr\, r^2 \int_{-\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}} dz = 2\sqrt{2} \int_0^2 dr\, r^2 \sqrt{1-\frac{r^2}{4}},$$

dove si è usato $\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = 2$. Facendo allora il cambiamento di variabile $r = 2\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tramite il quale $\sqrt{1-\frac{r^2}{4}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ (non negativo per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$), si ottiene

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2} \int_0^2 dr\, r^2 \sqrt{1-\frac{r^2}{4}} &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, 2\cos t (2\sin t)^2 \cos t = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin^2 2t \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right) = \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Alternativamente, essendo D un semi-ellissoide di semiassi 2, 2 e 1 rispettivamente lungo gli assi x, y, z, si possono usare coordinate sferico-ellittiche:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta\sin\varphi, \\ y = 2r\sin\theta\sin\varphi, \qquad r \ge 0,\, 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

il cui jacobiano J è chiaramente uguale a quello delle coordinate sferiche con le prime due righe moltiplicate per 2, e dunque $|\det J| = 4r^2\sin\varphi$. Essendo allora chiaramente $\frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = r^2$, l'insieme di integrazione si trasforma in

$$F = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le \pi\},$$

e l'integrale considerato diventa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_D y\, dxdydz &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 dr\, 8r^3 \sin\theta \sin^2\varphi \\
&= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^\pi d\varphi \sin^2\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^1 dr\, r^3 = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \sqrt{2}\pi,
\end{aligned}$$

avendo usato $\int_0^\pi d\varphi \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\varphi\,(1-\cos 2\varphi) = \frac{\pi}{2}$.

3. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy + x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

sulla curva $\gamma(t) = (t, \log t)$, $t \in [1,2]$.

Soluzione. Siano

$$P(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{2xy + x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + x$$

le due componenti del campo f. Avendosi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = 2y\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} + 1 = 2y\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3} + 1,$$

si vede che f non è irrotazionale, e dunque nemmeno conservativo. Si vede anche però che definendo i due campi vettoriali

$$f_1(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right), \qquad f_2(x,y) = (0,x),$$

f_1 è irrotazionale e $f = f_1 + f_2$. Inoltre il dominio di f_1, che è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non è semplicemente connesso, ma essendo il sostegno di γ contenuto nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, che è semplicemente connesso, f_1 ristretto a tale insieme sarà conservativo. Per determinarne un potenziale calcoliamo

$$U(x,y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy = (t = x^2+y^2) = x\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

e iponendo $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si deduce che $g'(x) = 0$, da cui $g(x) = c$ (quindi anche U è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e dunque in realtà f_1 è conservativo in tutto il suo dominio). Pertanto

$$\int_\gamma \langle f_1, \gamma'\rangle = U(2,\log 2) - U(1,0) = 1 - \frac{2}{4+\log^2 2},$$

e d'altra parte chiaramente

$$\int_\gamma \langle f_2, \gamma'\rangle = \int_1^2 dt\, t\cdot\frac{1}{t} = 1,$$

e in conclusione $\int_\gamma \langle f, \gamma'\rangle = 2 - \frac{2}{4+\log^2 2}$.

In alternativa, si può applicare il teorema di Gauss-Green all'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \log x\}$, la cui frontiera è l'unione dei sostegni della curva γ data e di quelli dei segmenti $\sigma_1(t) = (t,0)$, $t \in [1,2]$, e $\sigma_2(t) = (2,t)$, $t \in [0, \log 2]$. Tenendo allora conto del fatto che l'orientazione positiva di γ è opposta a quella indotta dall'orientazione positiva di ∂D, mentre quelle di σ_1, σ_2 coincidono con quest'ultima, si avrà

$$\int_{\partial D^+} \langle f, \gamma'\rangle = -\int_\gamma \langle f, \gamma'\rangle + \int_1^2 P(t,0)\,dt + \int_0^{\log 2} Q(2,t)dt.$$

Calcoliamo i due ultimi integrali:

$$\int_1^2 P(t,0)\,dt = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^{\log 2} Q(2,t)dt = \int_0^{\log 2} dt\left(\frac{4t}{(4+t^2)^2} + 2\right) = -\frac{2}{4+t^2}\bigg|_0^{\log 2} + 2\log 2$$
$$= -\frac{2}{4+\log^2 2} + \frac{1}{2} + 2\log 2.$$

D'altra parte, per il teorema di Gauss-Green e per quanto visto sopra,

$$\int_{\partial D^+} \langle f, \gamma' \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \iint_D 1\, dxdy = \int_1^2 dx \log x$$
$$= x \log x - x|_1^2 = 2\log 2 - 1.$$

Pertanto

$$\int_\gamma \langle f, \gamma' \rangle = -(2\log 2 - 1) + \frac{1}{2} - \frac{2}{4+\log^2 2} + \frac{1}{2} + 2\log 2 = 2 - \frac{2}{4+\log^2 2}.$$

4. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$f(x,y,z) = (-y, x^2, e^{z^2})$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\},$$

orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa.
Soluzione. Per il teorema di Stokes,

$$\iint_{\Sigma^+} \langle \mathrm{rot}\, f, n \rangle = \int_{\partial \Sigma^+} \langle f, \gamma' \rangle$$

e il bordo di Σ,

$$\partial\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 9,\ z = 0\},$$

ha come parametrizzazione positiva $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Pertanto il flusso richiesto è

$$\int_{\partial\Sigma^+} \langle f, \gamma' \rangle = \int_0^{2\pi} dt\, (9\sin^2 t + 27\cos^3 t) dt$$
$$= 9 \int_0^{2\pi} dt\, \frac{1 - \cos 2t}{2} + 27 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t)$$
$$= \frac{9}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} + 27 \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 9\pi.$$

Un altro metodo consiste nel calcolare direttamente il flusso richiesto tramite la definizione. La superficie Σ è cartesiana, e dunque un vettore normale positivo è dato da

$$n = \left(-\frac{\partial}{\partial x}(9 - x^2 - y^2), -\frac{\partial}{\partial y}(9 - x^2 - y^2), 1 \right) = (2x, 2y, 1),$$

inoltre

$$\mathrm{rot}\, f = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^2 & e^{z^2} \end{pmatrix} = (0, 0, 2x + 1),$$

e quindi

$$\iint_{\Sigma^+} \langle \mathrm{rot}\, f, n \rangle = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 9\}} (2x+1) dxdy = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 9\}} 1 dxdy = 9\pi$$

avendo usato, nell'ultima uguaglianza, il fatto che $\{x^2 + y^2 \leq 9\}$ è invariante per $x \mapsto -x$ e dunque l'integrale di $2x$ su tale insieme è nullo per parità.

5. Data l'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = \frac{t-1}{t+1}, \qquad t > -1,$$

(a) esprimerne l'integrale generale tramite funzioni note e integrali di funzioni note;
(b) dire se esistono soluzioni tali che $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ esista finito, e calcolarlo.

Soluzione. (a) Il polinomio caratterstico dell'equazione omogenea $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ ha le radici distinte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ e dunque l'equazione omogenea ha le soluzioni linearmente indipendenti $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^{2t}$, con wronskiano

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una soluzione dell'equazione non omogenea è necessario usare il metodo variazione delle costanti, non essendo il termine noto un quasi-polinomio. La seconda colonna di $W(t)^{-1}$ è dunque

$$W(t)^{-1} = \frac{1}{3e^t} \begin{pmatrix} * & -e^{2t} \\ * & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -\frac{1}{3}e^{t} \\ * & \frac{1}{3}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(t) = ae^{-t} + be^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}\int_0^t ds\, e^s \frac{s-1}{s+1} + \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}.$$

(b) L'integrale generale si può riscrivere come

$$y(t) = ae^{-t} + \left(b + \frac{1}{3}\int_0^t ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}\right)e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}\int_0^t ds\, e^s\frac{s-1}{s+1}.$$

Poiché allora chiaramente $\int_0^{+\infty} ds\, e^s \frac{s-1}{s+1} = +\infty$ (la funzione integranda diverge esponenzialmente per $s \to +\infty$), si ha

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\int_0^t ds\, e^s\frac{s-1}{s+1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t ds\, e^s\frac{s-1}{s+1}}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t\frac{t-1}{t+1}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t+1} = 1,$$

avendo usato la regola di de l'Hopital. Si vede allora che il primo e il terzo termine di $y(t)$ hanno limite finito per $t \to +\infty$, e dunque, affinché esista finito $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, è necessario che $b = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}$, che è chiaramente finito. Inoltre, per tale valore di b, si ha, usando ancora de l'Hopital,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left(b + \frac{1}{3}\int_0^t ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}\right)e^{2t} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{b + \frac{1}{3}\int_0^t ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}}{e^{-2t}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}e^{-2t}\frac{t-1}{t+1}}{-2e^{-2t}} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

In definitiva, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ esiste finito se e solo se $b = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} ds\, e^{-2s}\frac{s-1}{s+1}$, e in tal caso $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$.