Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 30/5/18

1. Siano

$$D_q := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}, \quad D_p := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, \exists \psi' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

   e siano $q : D_q \to L^2(\mathbb{R})$, $p : D_p \to L^2(\mathbb{R})$ definiti da

$$(q\psi)(x) = x\psi(x), \qquad (p\psi)(x) = -i\psi'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Posto $\psi_\sigma(x) := (2\pi)^{-1/4}\sigma^{-1/2}e^{-x^2/4\sigma^2}$, verificare

   (a) $\|\psi_\sigma\|_2 = 1$;

   (b) $\psi_\sigma \in D_q \cap D_p$;

   (c) esistono costanti $A, B > 0$ tali che $\|q\psi_\sigma\|_2 = A\sigma$, $\|p\psi_\sigma\|_2 = B\sigma^{-1}$;

   (d) q e p non sono limitati.

2. Mostrare che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

3. Sia $\pi : \mathcal{W} \to B(H)$ una rappresentazione regolare dell'algebra di Weyl, e sia $P \in B(H)$ definito da

$$\langle \xi, P\eta \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} dz \, e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(z))\eta \rangle, \qquad \xi, \eta \in H.$$

   Verificare che $P \neq 0$ (sugg.: da $\pi(W(\zeta))P\pi(W(\zeta)) = 0$ per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ segue che la trasformata di Fourier di $z \mapsto e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(z))\eta \rangle$ è identicamente nulla.)